# O QUE É DEMONSTRAÇÃO? ASPECTOS FILOSÓFICOS

Thiago Nagafuchi[1]
Irinéa de Lourdes Batista[2]

## RESUMO

"O que é demonstração?" é uma pergunta ampla, que pode ser respondida a partir de diversas vertentes. Nosso objetivo não é obter uma resposta única, mas sim analisar e investigar como um olhar filosófico para esta pergunta pode contribuir para a Educação Matemática. Para este fim, este artigo, que é parte do nosso estudo de mestrado, trata do tema *demonstração em matemática* a partir de alguns aspectos filosóficos, como o significado das palavras *prova* e *demonstração*, sua relação com a Matemática, a Filosofia da Matemática e a Lógica Matemática. Em complementação, é feita a análise acerca da epistemologia dos pesquisadores em Educação Matemática que estudam o tema.

**Palavras-chave**: Prova, Demonstração, Educação Matemática, Filosofia da Matemática, Lógica Matemática, Epistemologia dos Pesquisadores.

## INTRODUÇÃO

Há quem diga que as provas são o coração da matemática. De toda forma, não há como negar sua importância histórica e epistemológica no desenvolvimento da atividade matemática e também no atual cenário que se encontra a Ciência.

A despeito de sua importância para a Matemática, por vezes a prova se torna a atividade nuclear no ensino de diversas disciplinas que se encontram nos programas curriculares de cursos superiores de matemática. Um motivo que, sozinho, torna suficiente, e também necessária, a inclusão de uma discussão aprofundada do tema entre os educadores matemáticos.

---

[1] Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina.
[2] Professora doutora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

Motivos não faltam, também, para tal discussão na Educação Matemática. Basta notar o crescente número de pesquisas internacionais realizadas nos últimos anos como lembra Pietropaolo (2006), que do fato do tema chamar tanto a atenção dos pesquisadores, levou à criação de um jornal a ele dedicado: *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, disponível em <*http://www.lettredelapreuve.it*>. A maioria das pesquisas envolvendo esse assunto na Educação Matemática, foi desenvolvida a partir de meados dos anos 80 e intensificada nos anos 90.

Um dos possíveis motivos da explosão de pesquisas sobre provas e demonstrações, foi a inclusão das demonstrações no currículo da educação básica em países como Estados Unidos, Canadá e Inglaterra. Hanna e de Villiers (2008) corroboram dizendo que diversos documentos curriculares de matemática elevaram o status da prova na matemática escolar em diversas jurisdições educacionais pelo mundo.

O tema vem sendo igualmente discutido nos principais congressos internacionais de educação matemática. No próximo ICMI, que realizar-se-á em maio de 2009 em Taiwan, haverá um grupo de estudos intitulado *Proof and Prooving in Mathematics Education*, que além da atração na conferência de estudos com apresentações de trabalhos, editar-se-á um volume com contribuições selecionadas nas apresentações de trabalho, além de um *website* com informações sobre a conferência, já disponível em <*http://jps.library.utoronto.ca/ocs/index.php?cf=8*>. Mais informações constam na revista *ZDM* número 1, volume 40 de janeiro de 2008. O documento de discussão da conferência propõe inúmeros e possíveis temas de estudo e discussão.

No Brasil, em 2002, ocorreu um encontro para a discussão do tema. Tal encontro gerou um número especial do periódico *BOLEMA*, o que mostra que o assunto vem tomando cada vez um lugar de importância em pesquisas da educação matemática. Porém, as discussões sobre o tema ainda devem ser ampliadas por aqui.

Por conseguinte, faz-se conspícua a discussão sobre provas e demonstrações na educação matemática, principalmente na realidade brasileira, que carece de discussões sobre o tema.

## AS PALAVRAS: *DEMONSTRAÇÃO* E *PROVA*.

A pergunta que direciona os estudos deste artigo é “O que é demonstração?”. É interessante, sobremaneira, iniciarmos com os significados das palavras *prova* e *demonstração*.

Por uma busca no dicionário de língua portuguesa *Houaiss online*, encontramos os seguintes significados e rubricas:

> **Demonstração**: ato ou efeito de demonstrar. **1** qualquer recurso capaz de atestar a veracidade ou a autenticidade de alguma coisa; prova. **1.1** raciocínio que torna evidente o caráter verídico de uma proposição, idéia ou teoria Ex.: d. matemática.
>
> **Prova**: **1** aquilo que demonstra que uma afirmação ou um fato são verdadeiros; evidência, comprovação. **2** ato que dá uma demonstração cabal de (afeto, fidelidade, felicidade etc.); manifestação, sinal. **3** trabalho escolar, ger. composto de uma série de perguntas, que tem por finalidade avaliar os conhecimentos do aluno; teste, exame.(HOUAISS *Online*).

Desconsiderando o uso coloquial da palavra, vemos que apenas a rubrica 1.1 do significado de demonstração tem uma relação direta com a Matemática. Vemos também que a prova é uma espécie de demonstração, usada para demonstrar que um fato ou afirmação são verdadeiros, e ainda pode incluir o significado de demonstração matemática.

Um olhar mais cuidadoso para as palavras nos leva a um dicionário de termos filosóficos, no qual encontramos o seguinte:

> **Demonstração**: Uma demonstração é uma dedução destinada a provar a verdade da sua conclusão apoiando-se sobre premissas reconhecidas ou admitidas como verdadeiras. (LALANDE, 1999, p. 239).
>
> **Prova**: Operação que leva a inteligência de uma maneira indubitável e universalmente convincente (pelo menos de direito) a conhecer a verdade de uma proposição antes considerada como duvidosa. A prova é, em geral, um raciocínio, mas nem sempre: pode consistir numa apresentação de fato que afasta a dúvida. Daí que esta palavra, num sentido, por assim dizer, material, se aplique também ao fato, ao documento, que prova alguma coisa. Por outro lado, a prova distingue-se, pelo seu caráter de verdade, das formas do raciocínio hipotético-dedutivo, onde simplesmente se mostra que existe uma ligação necessária entre certas premissas e certas conseqüências, sem nada pronunciar assertoticamente sobre estas. A idéia de ‘prova’ pertence à mesma ordem de noções lógicas como as de dúvida, refutação e certeza (LALANDE, 1999, p. 879).

Ou seja, neste dicionário, o termo *prova* é tomado como mais amplo que *demonstração*, e da mesma forma que o dicionário de Língua Portuguesa, inclui o significado de demonstração.

Já num dicionário de termos matemáticos, o *Dicionario de Matematicas* encontramos “Prova: sinônimo de demonstração” (BOUVIER e GEORGE, 1984, p. 678), e uma busca pelo termo *demonstração* remete diretamente ao termo formal, em que se define demonstração formal como sendo referente aos cálculos de predicados e proposicional. Já o *Dictionnaire des Mathématiques Modernes*, define apenas demonstração:

> **Demonstração**: série de relações pelas quais passamos de axiomas, ou de teoremas já estabelecidos, para um teorema dado. (CHAMBADAL, 1969, p. 67).

Entretanto, muitas vezes, principalmente em Matemática e nas aulas a que somos submetidos às provas, as palavras são tomadas como sinônimos. Como nos diz Pietropaolo (2005), no âmbito da Matemática as palavras são sinônimas e não precisam de adjetivações, como no caso de prova rigorosa.

Esta diferença também existe em outras línguas. Em francês, existem as palavras *preuve* e *demonstration*, embora muitas vezes usadas como sinônimas, são distintas para educadores matemáticos. Já na literatura anglófona, usa-se *proof* e *proving* e ainda uma distinção em *formal proof* e *mathematical proof*. (PIETROPAOLO, 2005).

O significado da palavra ainda pode variar de acordo com o contexto e o próprio conceito de demonstração, e mesmo dentro da comunidade de educadores matemáticos que pesquisam sobre o tema, há variações.

## DEMONSTRAÇÃO, MATEMÁTICA E FILOSOFIA DA MATEMÁTICA

A Matemática é uma ciência que permite um campo muito amplo de aplicações. Mesmo dentro da Matemática, existem campos chamados de Matemática Aplicada, cujo fim não é, naturalmente, unicamente teórico. O nosso interesse aqui é investigar o que é demonstração para aquele matemático que faz de seu uso uma busca ao desenvolvimento de uma ciência teórica.

A possibilidade da demonstração no seio da Matemática a distingue da necessidade e do caráter empírico das ciências que são ditas naturais. Por meio dela os matemáticos podem desenvolver e avançar em sua ciência, estabelecendo uma árvore teórica derivada de algumas verdades primeiras, os postulados e axiomas, em que cada galho e cada folha representam um resultado, um teorema ou um corolário, mantendo o caráter de verdade, universal e atemporal. Conforme Shapiro:

> Como o conhecimento matemático parece estar baseado em demonstração, não em observação, a matemática é um aparente contra-exemplo à principal tese

> empiricista. De fato, a matemática é, algumas vezes, tida como um paradigma de um conhecimento a priori – conhecimento anterior a, e independente da experiência. (SHAPIRO *apud* BICUDO, 2002, p.82).

Para Bicudo (2002), as definições da Lógica é o que deveria modelar as demonstrações matemáticas, porém, a demonstração que se encontra nos livros e periódicos é aquela que satisfaz a comunidade de especialistas, não interessando o quão distante ela possa estar do ideal lógico.

Godino e Récio (1997) argumentam que no contexto da matemática profissional, como a atividade produzida pelos matemáticos, nem sempre as provas obedecem estritamente a característica tão cara aos aficionados pelo formalismo, ou seja, elas não são dadas de acordo com a definição de prova formal.

A História da Matemática, como assevera Pietropaolo (2005), mostra que a busca da verdade e o desejo de validá-la têm sido objeto de estudos matemáticos há mais de dois mil anos, e que apenas recentemente o absolutismo da demonstração e da verdade foram postas em cheque.

Ainda para o mesmo autor, a explicação da obsessão pela busca de verdades absolutas é simples: isto afastaria definitivamente a incidência do julgamento humano e das evidências meramente intuitivas da Matemática.

Era este afastamento que pretendiam as escolas logicista e formalista da Filosofia da Matemática. Por um lado, a primeira tentaria a fusão entre dois campos do conhecimento, a Matemática e a Lógica. Russel (1974, p.185) argumentou que "a conseqüência é que se tornou impossível traçar uma linha entre as duas; de fato, as duas são uma". E ainda,

> A Matemática é uma ciência dedutiva: partindo de certas premissas, chega, por um estrito processo de dedução, aos vários teoremas que a constituem. É verdade que, no passado, as deduções matemáticas eram com freqüência muito destituídas de rigor; é também verdade que o rigor é um ideal dificilmente alcançável. Não obstante, se faltar rigor em uma prova matemática, ela será, sob esse aspecto, defeituosa; não constitui defesa a alegação de que o senso comum mostra ser o resultado correto, porquanto, se tivéssemos de confiar nisso, melhor seria abandonar completamente o argumento do que trazer a falácia em socorro do senso comum. Nenhum apelo ao senso comum, ou "intuição" ou qualquer outra coisa que não a estrita lógica dedutiva, deve ser necessário à Matemática após estabelecidas as premissas. (RUSSEL, 1976, p.139)

E por outro lado, num sentido de preservar o rigor, o Formalismo pregava a completude dos sistemas formais que pudessem estar subjacentes às teorias matemáticas, querendo axiomatizar e formalizar todas as teorias possíveis.

O caminho que Hilbert encontrou para isso foi a metamatemática, cujo objeto de estudo são as teorias formais. Por um lado, cabia-lhe mostrar que a teoria é consistente, ou seja, não encerra contradições em si. Havia também o problema da completude, isto é, "a propriedade que garante que dada qualquer asserção expressa na linguagem do sistema, ela, ou sua negação, são demonstráveis (mas não ambas, pois senão o sistema seria inconsistente)" (da Silva, 2007, p.188), e ainda a independência dos axiomas do sistema.

O programa de Hilbert sofreu um terrível golpe quando, em 1931, um matemático austríaco chamado Kurt Gödel publicou um artigo em que mostrava que: (1) "a aritmética formal, e por extensão a maior parte das teorias matemáticas interessantes, era *incompleta*" e que (2) "a demonstração da consistência da aritmética formal era *impossível* por métodos que pudessem ser formalizados na própria aritmética formal" (da Silva, 2007, p.204-5, grifos do autor).

Uma outra escola filosófica, que surgiu como uma contraposição ao Formalismo, quando se acreditou que os teoremas de Gödel significavam a inutilidade da formalização, foi o Quasi-empiricismo de Imre Lakatos.

Lakatos propôs uma dinâmica do conhecimento matemático baseada em uma heurística que tem como motores principais as provas e as refutações. Os passos dessa heurística sintetizam-se da seguinte forma: (1) Uma conjectura primitiva, (2) prova, (3) contra-exemplos à conjectura primitiva, chamados de globais, (4) a prova é re-examinada, (5) exame de provas e outros teoremas para verificar se o lema achado ou o conceito gerado pela prova ocorre neles, (6) as conseqüências até então aceitas da conjectura original e agora refutada são conferidas e (7) os contra-exemplos convertem-se em novos exemplos, abrindo novos campos de investigação. (LAKATOS, 1978).

E, assim, ele argumenta que o estilo dedutivista, fundamentado nos axiomas, teoremas e provas, "oculta a luta, esconde a aventura. Toda a história evapora, as sucessivas formulações provisórias do teorema durante a prova são relegadas ao esquecimento enquanto o resultado final é exaltado como infalibilidade sagrada." (LAKATOS, 1978, p.186).

## DEMONSTRAÇÃO E A LÓGICA MATEMÁTICA

Destacamos inicialmente o estreito laço entre a demonstração e a Lógica, que possui um ramo que a tem como objeto de estudo. Desta forma, começamos com a definição de prova formal dada por Tarski (1969), que a considera como uma síntese de uma construção de uma seqüência de proposições tal que:

> (i) a primeira proposição é um axioma; (ii) cada uma das outras ou é um axioma ou é dedutível diretamente das que a precedem na seqüência; (iii) a última proposição é aquilo que se pretendia demonstrar. (Tarski, 1969, p.75).

E ainda podemos definir a demonstração por meio de um sistema formal, que consiste de (i) um conjunto de axiomas e (ii) um conjunto de regras de inferência, que permitem uma relação entre os axiomas e as proposições. No primeiro conjunto, encontramos além dos axiomas da teoria propriamente dita, os axiomas lógicos.

A partir disso, na Lógica, sendo **F** uma fórmula escrita numa linguagem formal **L**, ela será formalmente demonstrável num sistema formal se existir uma seqüência de fórmulas que contém apenas axiomas ou fórmulas demonstradas formalmente a partir das fórmulas que precedem na lista. E assim, uma demonstração de **F** é uma seqüência, uma lista, que se termina por **F**. As fórmulas demonstradas são chamadas teoremas ou teoremas formais (WAGNER, 2002).

Para da Silva (2002), considerar a demonstração como seqüências ordenadas no espaço lógico, com relações de dependência ou conseqüência lógicas, reflete apenas um de seus aspectos, que ele chama de *lógico-epistemológico*. Para ele ainda existem mais dois aspectos: o *retórico* e o *heurístico*.

O aspecto retórico remete ao poder de convencimento das demonstrações, que, "segundo o qual, elas aparecem como portadoras de força coercitiva de aquiescência às teses demonstradas" (DA SILVA, 2002, p.69).

O outro aspecto, em que uma demonstração tem uma função heurística, versa que a ela pode ser indutora de descoberta matemática. Aqui o autor toma a perspectiva da epistemologia falibilista popperiana, proposta por Imre Lakatos em sua Filosofia da Matemática centrada na dialética de provas e refutações.

Sendo assim, uma vez que a demonstração precisa de uma incorreção lógica para poder induzir ao progresso matemático, segundo o aspecto heurístico, ela não pode ser uma demonstração logicamente impecável do aspecto lógico-epistemológico. O que impossibilitaria, segundo esta visão, a possibilidade de uma convivência entra estes dois aspectos discutidos.

Da Silva (2002) enumera as seguintes duas finalidades das demonstrações: (i) estabelecer a veracidade de um enunciado e (ii) convencer sobre a veracidade do que é demonstrado.

Uma vez que as definições dadas acima favorecem apenas a finalidade (i), pois não abre espaço para um sujeito, a finalidade (ii), assim como o aspecto heurístico, mostra a necessidade de um sujeito, de um caráter subjetivo.

Embora o autor afirme que não tenha o papel de expor a teoria das demonstrações, e muito menos criticá-la, ele conclui apresentando duas observações: a primeira, em que ele chama esta mistura de elementos objetivos e subjetivos de indesejável, alegando "por que não separar definitivamente o objetivo do subjetivo, relegando à teoria matemática das demonstrações simplesmente o papel de estudar relações de dependência lógica em seu escopo mais geral [...]?" (DA SILVA, 2002, p.78); e a segunda, alegando que, ao passo que a demonstração só existe no interior de um sistema formal determinado, não se pode esperar que as verdades da matemática sejam demonstráveis em um sistema formal que obedeça restrições como a decidibilidade de seus axiomas, alegando que isso não ocorre nas demonstrações "da vida real".

Em outro estudo, encontramos ainda uma análise da palavra *formal*, que pode ter alguns significados enumerados por Arzarello (2007). A primeira forma, concerne as sentenças matemáticas, como objetos sintáticos estruturados, que são independentes de seus contextos intertextuais. Por exemplo, as sentenças da teoria do silogismo de Aristóteles, em que as conclusões dependem das formas sintáticas das sentenças.

A segunda forma concerne o modo como a matemática é apresentada como produto final numa linguagem formalizada. A terceira forma diz respeito à noção de conseqüência lógica.

Antes de falarmos desta terceira forma, convém introduzir as noções de *prova* e *derivação* dadas por Rav (1999) e também discutidas por Arzarello (2007).

Para os autores supracitados, uma *prova* é uma prova conceitual do discurso matemático costumeiro, com um conteúdo semântico irredutível. Já uma *derivação* em uma teoria formalizada **T**, é uma seqüência finita de fórmulas na linguagem de **T**, cada membro da qual é ou um axioma ou é o resultado da aplicação de uma das muitas regras de inferência estabelecidas finita e explicitamente à fórmulas prévias na seqüência. (Rav, 1999). Ou seja, para ele, uma derivação é o que definimos acima como prova formal.

A seguir, chegaremos numa outra definição de prova de acordo com essa perspectiva. Porém, façamos algumas observações antes. Cada teorema é uma suposição B para a qual existe outra suposição A, tal que A é a conseqüência lógica de A. Isto pode ser simbolizado por "A → B", em que a seta tem somente uma função icônica, ou seja, não significa implicação formal. Para Rav,

> ao ler um artigo ou monografia, de forma freqüente acontece – como todos sabem muito bem – que se chega num impasse, não vendo porque uma certa afirmação B deve seguir de uma afirmação A. [...]. Assim, ao tentar entender a afirmação do autor, se pega um papel e um lápis e tenta-se preencher as lacunas. Após alguma reflexão na teoria que está por trás, o significado dos termos e o uso do conhecimento geral sobre o tópico, incluindo eventualmente uma manipulação simbólica, vê-se um caminho de A para $A_1$, de $A_1$ para $A_2$,..., e finalmente de $A_n$ para B. Esta análise pode ser escrita sistematicamente como segue: $A \rightarrow A_1$, $A_1 \rightarrow A_2$,..., $A_n \rightarrow B$. (RAV, 1999, p. 14).

E se há dificuldade em uma dessas passagens, pode haver uma interpolação entre A e $A_1$, como $A \rightarrow A'$ e $A' \rightarrow A_1$. O processo de interpolações não tem um limite superior, ou seja, o tamanho da análise de uma afirmação depende do agente.

Assim, chegamos a seguinte definição de prova: uma prova é um conjunto ordenado de afirmações da forma $A_i \rightarrow A_{i+1}$, que são ligadas por transitividade. Em outras palavras, "a prova nada mais é do que uma decomposição da relação de conseqüência numa corrente de instâncias da mesma relação (garantida a transitividade) que é fácil de ver, até que as pessoas concordam que as vêem." (ARZARELLO, 2007, p.49), completando que a prova é um discurso que pode se referir a cada ramo possível do conhecimento matemático que o agente acredita ser útil para garantir que B é de fato conseqüência lógica de A.

A partir dos comentários acima, vimos que, embora as definições dadas pela Lógica excluam a possibilidade de um sujeito, o apelo de uma prova está intimamente conectado ao sujeito. É ele quem deve compreender, se convencer, estruturar e reescrever uma prova.

## DEMONSTRAÇÃO SOB UMA ABORDAGEM SOCIAL

Deixando o escopo da Lógica, podemos argumentar sobre o papel social da demonstração. Se a demonstração é o núcleo da Matemática, então ela é um aspecto central à prática da Matemática.

Paul Ernest propõe uma Filosofia da Matemática cunhada em aspectos sociais, à qual ele denomina Construtivismo Social. Ernest (2006) descreve tal filosofia como nominalista, em relação à ontologia, e como convencionalista, em respeito à epistemologia e aos fundamentos do conhecimento. O construtivismo social é uma filosofia nominalista porque os objetos da matemática são signos, e é convencionalista porque os conceitos, termos, teoremas, regras e lógica das provas, verdades e teorias matemáticas são entidades culturais socialmente construídas.

Para ele, a prova é algo essencial para o estabelecimento da verdade matemática. Necessária, porém não é suficiente. Ela depende que um grupo de profissionais as aceite e as use, além de fatores de segunda ordem, que são subjetivos a cada profissional e que influenciam o estabelecimento de novos conhecimentos matemáticos.

Em um sentido parecido, Davis (2006) cita o *Clay Mathematics Institute*[1], que oferece prêmios de um milhão de dólares para a solução de cada um dos sete famosos problemas. O Instituto, por conseguinte, criou um critério de aceitabilidade das soluções. Primeiro, a solução deve ser publicada num periódico renomado; segundo, a solução deve permanecer aceita na comunidade matemática por um período de dois anos; e por último, o instituto nomeia uma comissão para verificar a solução.

Em resumo, uma solução é aceita se um grupo de matemáticos qualificados concorda com a solução. Ou seja, é um fenômeno social, em que a natureza da matemática é construída socialmente e depende de um consenso.

Livingstone (1999) analisa a demonstração sob a ótica da Sociologia da Ciência, e desenvolve seu argumento acerca das culturas de demonstração, concatenando os seguintes aspectos da prova: o raciocínio matemático, a argumentação matemática, a materialidade da cultura matemática, o papel das definições e a fenomenologia da descoberta matemática.

Para tanto, o autor utiliza a teoria da Gestalt, argumentando que o raciocínio matemático de uma prova é análogo a algumas características da percepção gestalt. Por exemplo, considere a seguinte prova da unicidade do elemento identidade de um grupo:

[1] http://www.claymath.org/

sejam *e* e *e'* dois elementos identidades, então *e* = *e'.e* = *e'*. A prova apresenta duas gestalts, a primeira, reside no fato de o termo intermediário poder ser lido de duas formas diferentes (*e'* como um elemento identidade à esquerda e *e* como um elemento identidade à direita), a segunda, que diz respeito ao que realmente foi provado, no caso, que se existem dois elementos identidades, eles devem ser iguais.

Ou seja, para o autor, a gestalt é esta característica do raciocínio que estão implícitas e que subjazem as provas matemáticas, presentes em todos os níveis de demonstrações. Esta gestalt - idiossincráticas à uma demonstração particular – é uma organização de práticas de demonstração que exibem o raciocínio daquela gestalt. E ainda mais, o raciocínio e a prática matemática são a arte de encontrar tais gestalts.

E é por meio delas que Livingstone justifica o que ele chama de fenomenologia da descoberta matemática. O mote da descoberta seria o buscar e encontrar tais gestalts, residindo neste ato os elementos necessários para que ela ocorra. Enquanto o matemático configura um curso de raciocínio integrando, descartando, revisando, comparando, combinando e investigando seus argumentos parciais, ele orienta e compõe o seu trabalho.

E nesta visão sociológica, quase antropológica, se o trabalho dos matemáticos é provar teoremas, a descoberta matemática é o real trabalho do “fazer matemática”.

Em uma das conclusões, Livingston sugere que o “*aparecimento* da verdade necessária ou certeza absoluta na demonstração matemática [...] pode ser examinada como um fenômeno cultural e como um fenômeno gerado pelas mesmas práticas que sustentam estas práticas - ou seja, como um fenômeno que pertence a uma tribo particular, a tribo dos matemáticos provadores[1] de teoremas.” (LIVINGSTONE, 1999, p.885).

## PROVA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: EPISTEMOLOGIA DOS PESQUISADORES

Acima vimos a importância que o assunto demonstração vêm ganhando em pesquisas na área da Educação Matemática. Segundo Hanna (2008), as áreas de ênfase destes estudos[2] são: os aspectos epistemológicos da prova, os aspectos cognitivos, uso de

[1] Tradução livre do termo “prover”.
[2] Vale ressaltar que todos os estudos a que ela se refere são internacionais.

intuição e dos esquemas nas provas, a relação entre prova e raciocínio, a utilidade da heurística para o ensino da prova, a ênfase em estruturas lógicas no ensino superior, etc.

Porém, com o crescente número de pesquisas sobre o tema, sobre as mais diversas perspectivas, há de se esperar que não haja consenso entre os próprios pesquisadores acerca do que *é* demonstração em matemática. Como argumentou Balacheff (2004), em uma pesquisa em que, da análise de diversos artigos sobre o tema, chegou à conclusão acerca de diferentes pontos de vista a respeito das concepções dos pesquisadores em Educação Matemática que escreveram sobre o tema. Não que os pesquisadores devam todos seguir uma mesma linha, mas as convergências deveriam ser visíveis e as divergências tornadas em questões de pesquisa.

As palavras-chaves das pesquisas não se limitam à palavra prova, há ainda argumentação, justificação, validação, e para cada uma delas, os pesquisadores têm em mente significados ligeiramente diferentes.

Balacheff (2004) pergunta se um consenso é possível, em que consenso seria uma estrutura teórica comum, e o impasse na rota para alcançar tal programa é a própria epistemologia de prova matemática. Por epistemologia, o autor entende a identificação de um objeto e a rede de relações que se estabelece em volta de outros objetos, tal como problemas, tarefas e outras possíveis atividades que a envolvem.

Ele então enumera as diferentes visões epistemológicas acerca da prova, e argumenta que cada visão é essencial da determinação de escolha de programas de pesquisa e até mesmo compreensões radicalmente diferentes do que os alunos podem produzir.

As visões são: (1) a prova matemática como um tipo exemplar e universal de prova, (2) a prova e a sua natureza idiossincrática, (3) a prova como núcleo da Matemática, (4) a prova como uma ferramenta necessária à Matemática, (5) a prova como uma especificidade da matemática como um campo autônomo.

Ele argumenta:

> De fato, não podemos evitar envolver em nosso trabalho nossa própria epistemologia de prova matemática, e além, nossa própria epistemologia da matemática. Mas se não estamos cientes das diferenças entre estas epistemologias e as implicações destas diferenças ao compartilhar teorias e métodos, problemas e resultados, estas epistemologias tornar-se-ão o obstáculo essencial ao progresso em nosso campo de pesquisa. É neste sentido que a

> epistemologia dos pesquisadores poderia tornar-se um impasse muito difícil de evitar ou resolver. (BALACHEFF, 2004, p. 10)

O autor enumera ainda alguns pontos comuns, que envolvem o aspecto social da racionalidade matemática, a existência de relações entre argumentação e prova, a necessidade de se analisar a prova sob a luz tanto da teoria quanto da prática, etc.

E em outra síntese, Balacheff (2004) analisa as estruturas de pesquisa que focam aspectos textuais e aspectos interpessoais, que seriam ainda outras epistemologias de pesquisa.

## CONCLUSÃO

Este artigo mostrou algumas noções sob o ponto de vista filosófico e epistemológico sobre o *que são* e *para que servem* as demonstrações. A nossa hipótese é de que uma resposta sistemática ou deveras técnica não é suficiente para as questões da educação matemática, quando relacionadas ao tema.

Não é suficiente porque elas não respondem às dificuldades cognitivas ou epistemológicas do ensino e aprendizagem da prova e não correspondem ao grande número de pesquisas que abarcam o tema, isto é, a necessidade de estudos aprofundados. Ou seja, esta pergunta não tem uma resposta pronta e evidente.

Compreender a prova matemática, epistemologicamente ou ontologicamente ou metodologicamente é deveras importante para o pesquisador e educador matemático interessado no assunto. Porém, com menor intensidade, é importante que o aprendiz também tenha tal compreensão.

Em uma pesquisa realizada a partir de 1995 na Inglaterra por um grupo de pesquisadores londrinos, envolvendo 2459 estudantes e seus professores, em que investigou-se a concepção e a compreensão de prova matemática dos alunos e a forma com a qual estes estudantes constroem provas (envolvendo o processo de construção e os métodos de construção utilizados). Um dos resultados gerais que os autores enfatizaram foi a necessidade de um ensino mais explícito da prova matemática. Aqueles que estiveram em contato com a escrita formal de provas geométricas tinham uma chance maior em escrever uma, e aqueles em que a prova foi ensinada como um tópico separado se saíram melhores do que outros ao avaliarem argumentos em álgebra, e ainda

> a pesquisa indica que a habilidade de construir, estimar ou escolher uma prova válida não é simplesmente um assunto do alcance matemático geral. Naturalmente há uma influência, mas pelo menos algumas das performances mais pobres em prova de nossos melhores estudantes podem simplesmente serem explicadas pela falta de familiaridade com o processo de demonstração. Muitos alunos tem uma pequena idéia deste processo e nenhuma compreensão de prova, a que, nossos achados sugerem, podem impedir suas habilidades de construir e avaliar corretamente as provas. (Healy e Hoyles, 1998, p.6-7).

De acordo com Balacheff (2004), acerca desta pesquisa, a educação da prova matemática não deve ser levada a um reducionismo quanto a sua forma, e sim ao significado de prova dentro da atividade matemática. Os autores da pesquisa ainda sugerem que esforços mais explícitos sejam feitos para atrair os estudantes pela prova enquanto seja discutida com eles a idéia de prova num meta-nível, em termos dos seus significados, generalidade e propósitos. David Tall corrobora com os resultados desta pesquisa, sugerindo que

> O desenvolvimento cognitivo dos estudantes deve ser levado em conta tal que a prova seja apresentada em formas que sejam para eles potencialmente significativas. Isto requer que os educadores e os matemáticos repensem a natureza da prova matemática e considerem o uso de diferentes tipos de prova de acordo com o desenvolvimento cognitivo do indivíduo. (TALL apud BALACHEFF, 2004).

Sendo ou não o coração da Matemática, a prova tornou-se um desafio para o ensino e aprendizagem desta ciência. Não importa o nível de ensino, raramente o aluno encontra a resposta para o que é a demonstração, tornando-a apenas uma ação sem significado que se repete mecânica e vertiginosamente, com a perda da riqueza da reflexão que esta pergunta pode incitar.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

**ARZARELLO, F.**, *The proof in the 20th century: from Hilbert to automatic theorem proving*. In Boero, P. (org.) *Theorems in School: from History, Epistemology and Cognition to classroom practice*, Rotterdam: Sense Publishers, 2007, p.43-64.

**BALACHEFF, N.**, *The Researcher Epistemology: a Deadlock for Educational Research on Proof*, disponível em <http://140.122.140.4/~cyc/_private/mathedu/me1/me1_2002_1/balacheff.doc>

**BOUVIER, A., GEORGE, M.**, Dicionario de Matematicas, trad. por Mauro Armiñi e Vicente Bordoy, Akal editor: Madrid, 1984.

**BICUDO, I.**, Demonstração em Matemática. *Bolema*, ano 15, n. 18: 79-90, 2002.

**CHAMBADAL, L.**, *Dictionnaire des Mathématiques Modernes*, Paris: Librarie Larousse, 1969.

**DA SILVA, J.J.**, A Demonstração Matemática da Perspectiva Lógica Matemática. *Bolema*, ano 15, n. 18: 68-78, 2002.

**DA SILVA, J.J.**, *Filosofias da Matemática*, São Paulo: Editora UNESP, 2007.

**DAVIS, P.J.**, When is a Problem Solved? *The Philosophy of Mathematics Education Journal*, Exeter, n. 19, 2006. Disponível em < http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/ >. Acesso em 19 de setembro de 2007.

**ERNEST, P.**, Nominalism and Conventionalism in Social Constructivism. *The Philosophy of Mathematics Education Journal*, Exeter, n. 19, 2006. Disponível em < http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/ >. Acesso em 19 de setembro de 2007.

**GODINO, J.D., RECIO, A.M.**, Meaning of proofs in Mathematics education, 1997. Disponível em < http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Godino/Godino97.html>

**HANNA, G., BARBEAU, E.**, Proofs as bearers of Mathematical Knowledge. *ZDM Mathematics Education*, 2008.

**HANNA, G. DE VILLIERS, M.**, ICMI study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, v. 40, n. 2, 2008.

**HEALY, L., HOYLES, C.**, *Justifying and proving in school mathematics. Summary of the results from a survey of the proof conceptions of students in the UK*. Research Report Mathematical Sciences, Institute of Education, University of London, 1998.

**HOUAISS, A.**, *Dicionário Houaiss Da Língua Portuguesa Online*: <http://houaiss.uol.com.br/gramatica.jhtm>

**LAKATOS, I.** *A Lógica do Descobrimento Matemático: Provas e Refutações*. Trad. por Nathanael C. Caixeiro, Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

**LALANDE, A.**, *Vocabulário Técnico e Crítico da Filosofia*. Trad. por Fátima Sá Carneiro, Maria E. de Aguiar, José E. Torres e Maria G. de Souza. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

**LIVINGSTONE, E.**, Cultures of Proving. *Social Studies of Science*, 29/6, 1999.

**PIETROPAOLO, R.C.**, *Demonstrações e Educação Matemática - uma análise de pesquisas existentes*. III Seminário Interancional de Pesquisa em Educação Matemática. Curitiba : Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2006.

**PIETROPAOLO, R.C.**, *(Re)significar a Demonstração nos Currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática*. Tese de Doutorado, São Paulo: PUC-SP, 2005.

**RAV, Y.**, Why Do We Prove Theorems? *Philosophia Mathematica*, v.7, n.3, 1999.

**RUSSEL, B.A.W.**, *Introdução à Filosofia Matemática*. Trad. por Giasone Rebuá. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1974.

**TARSKI, A.**, Truth and Proof, *Scientific American*, 220, 1969.

**WAGNER, P.**, *Qu'est-ce que La Théorie des Modèles?* In: Nouvel, P. (dir.), *Enquête sur le concept de modèle*, Paris : P.U.F., p. 7-28