# Lógica Matemática no Ensino Médio: uma proposta de atividades para mobilizar raciocínios com estrutura lógica formal

Autor: Raimundo de Souza Martins Neto

Orientadora: Profa. Dra. Celina A.A. Pereira Abar

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP

## RESUMO

O trabalho propõe um estudo sobre o raciocínio lógico formal nos processos de ensino e aprendizagem da matemática no ensino médio. Argumentar logicamente, analisar e interpretar criticamente as informações são princípios norteadores nos pressupostos teóricos para o ensino de Matemática. As dificuldades que os alunos apresentam em produzirem justificativas podem estar relacionadas ao desuso, ou uso incorreto, de uma estrutura lógica básica? Nosso trabalho se inicia com comentários sobre epistemologia utilizando-se das bases teóricas de Vigotsky e Piaget sobre origem e evolução das estruturas do pensamento lógico formal, relações sócios culturais e idade escola, juntamente com sugestões de atividades inspiradas no programa *Tarski's World*. Utilizando noções da engenharia didática, criamos, aplicamos e analisamos atividades para estimular o uso da lógica formal na compreensão dos conectivos lógicos (*e*, *ou*, *negação* e *implicação*) e quantificadores (*universal e existencial*), em alunos do 2º ano do ensino médio.

Palavras-chave: Lógica formal. Argumentação. Epistemologia. Cognitivismo.

## INTRODUÇÃO

Participo do grupo de pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM) na PUC/SP, criado em 2001 e que tem por objetivo investigar e pesquisar relações recíprocas entre práticas matemáticas, aprendizagem e tecnologias. O grupo trata também do desenvolvimento de cenários de aprendizagem, abordando conteúdos específicos, integrando recursos tecnológicos, "incentivando o desenvolvimento de competências intelectuais mais complexas que a tradicional armazenagem de conteúdos e investigar as influências das ferramentas, atividades e intervenções que compõem estes cenários nas trajetórias de aprendizagem de seus participantes." [1]

São responsáveis pelas inquietações que motivaram este trabalho, minhas atividades como professor de matemática do ensino médio da rede pública estadual de São Paulo e instituição particular na capital paulista por treze anos, aliadas aos cursos de graduação em Filosofia, especialização, iniciação científica e atualização, realizados no IME-USP.

[1] Extraído da página do grupo, www.pucsp.br/tecmem - acesso em 10-junho-2008.

As inquietações a que me referi envolvem a lógica formal utilizada nos textos matemáticos, nas falas dos professores, nas tentativas de formulações de provas, escritas e orais, por parte dos alunos, e suas influências, positivas ou negativas, no ensino e aprendizagem de matemática no ensino médio. Questões como: Em que medida a lógica formal está sendo utilizada coerentemente por professores e autores de livros didáticos? A dificuldade que os alunos apresentam em produzir provas e justificativas podem estar relacionadas ao desuso, ou uso incorreto, de uma estrutura lógica básica? A lógica utilizada no dia a dia, fora do ambiente escolar, é um obstáculo para que o uso da lógica matemática torne-se operacional?

Estas questões, entre outras, me parecem serem relevantes para a prática do professor de matemática e formam o ponto de partida desse trabalho. Nosso objetivo é pesquisar em que medida é possível desenvolver, em alunos do ensino médio, o domínio e a habilidade de utilização das regras da lógica formal.

## APRESENTAÇÃO DO TEMA DE PESQUISA

Ao refletirmos sobre a nossa questão de pesquisa, acreditamos que uma pequena abordagem sobre a problemática do conhecimento, que está implícito ao se trabalhar em processos de ensino e aprendizagem de matemática, venha enriquecer nosso trabalho. Acreditando que a escola e a sociedade não estão mutuamente isoladas, e sim interagindo uma com a outra, os conhecimentos que permeiam esses dois ambientes devem estar, de alguma forma, relacionados.

O tema de nosso trabalho, que envolve a lógica formal, nos remete à Filosofia. Dois filósofos em nosso entendimento têm papel relevante nos fundamentos de nosso trabalho: Aristóteles e Immanuel Kant.

Aristóteles (384-322 a.C.), filósofo da Grécia antiga, tido como o pai da lógica formal, já teria defendido diferentes níveis de conhecimento. O conhecimento *apodíctico*, que parte de premissas verdadeiras e imediatas, seria o tipo de conhecimento que sustentaria uma ciência de caráter rigoroso sem subjetividade. O outro conhecimento, também científico para Aristóteles, chamado de *dialético*, parte de premissas prováveis, que sejam admitidas por todos ou pela maioria dos sábios.

Na obra *Ética a Nicômaco*, Aristóteles propõe diferenciar uso e restrições para esses diferentes níveis de conhecimentos.

> Nossa discussão será adequada se tiver tanta clareza quanto comporta o assunto, pois não se deve exigir a precisão em todos os raciocínios por igual, assim como não se

> deve buscá-la nos produtos de todas as artes mecânicas. (...) Evidentemente, não seria menos insensato aceitar um raciocínio provável da parte de um matemático do que exigir provas científicas de um retórico. (ARISTÓTELES, apud RODHDEN, 2005, p.51)

Neste trabalho daremos atenção ao chamado conhecimento apodíctico, em que Aristóteles "buscou explicitar leis ou regras que garantam uma argumentação competente" (MACHADO, CUNHA, 2005, p.15).

Após a idade média encontramos as propostas de outro filósofo, Immanuel Kant (1724-1804) que influenciou estudiosos em diversas áreas do conhecimento, especialmente os interessados em epistemologia[2]. Pensador "situado no cruzamento de três grandes correntes ideológicas que sulcavam o século XVIII" (MORENTE, 1970, p.219), racionalismo de Leibniz[3], empirismo de Hume[4] e a ciência de Newton[5], é o responsável por estabelecer "um novo sentido do ser, que não é o ser 'em si', mas o ser 'para' o conhecimento, o ser no conhecimento" (ibid. 219).

Kant ressalta o caminho trilhado pela Matemática e o uso da lógica para se estabelecer conhecimento. Usa como exemplo uma proposta de demonstração do triângulo isósceles, onde ele afirma que,

> [...] não tinha que seguir passo a passo o que <u>via na figura</u>, nem o simples conceito que ela possuía, para conhecer, <u>de certa maneira</u>, as suas propriedades, que antes deveria produzi-la, ou construí-la, mediante o que pensava e o que representava *a priori* por conceitos e que para conhecer, <u>com certeza</u>, uma coisa *a priori* nada devia atribuir-lhe senão o que fosse conseqüência necessária do que nela tinha posto, de acordo com o conceito. (B XII, os grifos são nossos).

Após estas citações, mesmo que fora do contexto da obra, poderíamos apostar que o ensino de matemática, deveria dar prioridade aos estudos da lógica e dos conceitos, ou até mesmo desconsiderar quaisquer dados da experiência. Porém, a introdução da *Crítica da Razão Pura*, segunda edição, apresenta uma frase que não segue essa proposta,

> Não resta dúvida de que todo o nosso conhecimento começa pela experiência, efectivamente, que outra coisa poderia despertar e pôr em acção a nossa capacidade de conhecer senão os objectos que afectam os sentidos e que, por um lado, originam por si mesmo as representações e, por outro lado, põem em movimento a nossa faculdade intelectual e levam-na a compará-las, ligá-las ou separá-las, transformando assim a matéria bruta das impressões sensíveis num conhecimento que se denomina experiência?" (B 1), mas, "se, porém, todo o

---

[2] Teoria do conhecimento

[3] Doutrina que privilegia a razão dentre todas as faculdades humanas, considerando-a como fundamentos de todo conhecimento possível. O racionalismo considera que o real é em última análise racional e que a razão é portanto capaz de conhecer o real e de chegar à verdade sobre a natureza das coisas. Opõe-se ao empirismo fazendo-se metódico, recorrendo à lógica e à matemática (p.ex., em Leibniz). (JAPIASSÚ; MARCONDES, 2006; p.235-236).

[4] Doutrina ou teoria do conhecimento segundo a qual todo o conhecimento humano deriva, direta ou indiretamente, da experiência sensível externa ou interna. (JAPIASSÚ; MARCONDES, 2006; p.84).

[5] Newton empregou com sucesso o formalismo matemático na construção de sua teoria física, ao mesmo tempo defendeu a necessidade e a importância do método experimental. Foi grande a influência de Newton no desenvolvimento da ciência, podendo-se considerar que sua física fornece um paradigma de ciência que irá vigorar praticamente até o período contemporâneo. (JAPIASSÚ; MARCONDES, 2006; p.200-201)

> conhecimento se inicia *com* a experiência, isso não prova que todo ele derive *da* experiência(B 2).

Teríamos, portanto, de tratar de dois tipos de conhecimentos, um que não depende da experiência, seriam os conhecimentos *a priori* e os que dependem da experiência, os *a posteriori*.

Avançando na discussão, Kant apresenta os juízos[6] *analíticos* e os *sintéticos*, que originam das diferentes relações entre um sujeito e um predicado, ou seja, entre o objeto de estudo e suas características.

Segundo Otte (1993, p.299), Kant problematizou a relação entre o individual e o geral de uma maneira mais consistente que seus antecessores, e que a *Crítica da Razão Pura* marca um período importante na discussão sobre o conhecimento.

Não estamos defendendo como única via de conhecimento aquele produzido com o rigor científico, porém devemos estar atentos para não desestruturar os tópicos tratados no ensino de matemática no ensino médio, quando estes estiverem sendo trabalhados. A lógica formal tem seu papel na construção desses conhecimentos, portanto, não deve ser desprezada sua contribuição nos processos de ensino e aprendizagem.

## JUSTIFICATIVA DO TEMA DA PESQUISA.

Argumentar logicamente, analisar e interpretar criticamente as informações são princípios norteadores nos pressupostos teóricos para o ensino de Matemática. Os PCNEM[7] afirmam que "A Matemática ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, além de ser uma ferramenta para tarefas específicas em quase todas as atividades humanas." (BRASIL, 1999, p.256)

Os objetivos gerais do ensino da Matemática, no nível médio, contemplam seu caráter formativo, auxiliador na estruturação do pensamento e do raciocínio lógico. Atribui-se para esse ensino objetivo específicos, tais como a valorização da linguagem matemática na comunicação de idéias, uso e reconhecimento de representações equivalentes de um mesmo conceito e o desenvolvimento da capacidade de raciocínio, entre outros.

Em recente publicação, a Secretaria de Educação, ao tratar dos conhecimentos de matemática, destacando seus conteúdos, ressalta que:

> Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano, para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento, compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações, percebam a Matemática como um

[6] Kant considera apenas os juízos afirmativos, pois os negativos depois seriam de fácil aplicação.
[7] Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio

> conhecimento social e historicamente construído, saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.
> A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, [...] argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. (BRASIL, 2006, p.69)

Na introdução dos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997), encontramos indícios que reforçam nossa proposta de trabalho, onde destacamos a relação entre conhecimento formal e o sujeito aluno.

> Se por um lado não é mais possível deixar de se ter preocupações com o domínio de conhecimentos formais para a participação crítica na sociedade, considera-se também que é necessária uma adequação pedagógica às características de um aluno que pensa, de um professor que sabe e aos conteúdos de valor social e formativo. Esse momento se caracteriza pelo enfoque centrado no caráter social do processo de ensino e aprendizagem e é marcado pela influência da psicologia genética. (BRASIL, 1997, p.32)

Voltando a tratar da lógica formal e sua contribuição para a os processos de ensino e aprendizagem de matemática, destacamos seu papel quando "Trata-se de o aluno saber por seus próprios meios se o resultado que obteve é razoável ou absurdo, se o procedimento utilizado é correto ou não, se o argumento de seu colega é consistente ou contraditório." (BRASIL, 1997, p.51).

Acreditamos não só em uma didática da matemática que procure tratar dos elementos que compõe uma *atividade didática*, aluno, professor e os diferentes saberes, mas também que a participação do aluno não é simplesmente "saber" definições e teoremas mas sim utilizá-los de maneira coerente e não o único.

> Não se faz matemática simplesmente resolvendo problemas mas por vezes esquece-se que resolver um problema é apenas uma parte do trabalho, encontrar boas questões é tão importante como encontrar soluções para elas. Uma boa reprodução pelo aluno de uma actividade científica exige que ele aja, formule, prove, construa modelos, linguagens, conceitos, teorias, os troque com outros, reconheça aqueles que são conformes à cultura, retire desta aqueles que são úteis, etc.(BROUSSEAU, BRUN, 1996, p.38)

Tendo em mente que a matemática se utiliza de generalizações e se utiliza de simbologia e regras próprias, é importante possibilitar uma comunicação eficiente que permita ao aluno utilizar-se da Matemática para interpretar e resolver problemas, tanto os pertencentes ao seu cotidiano, quanto àqueles que lhe são apresentados em abordagem formal, numa estrutura tipicamente matemática. "Nesse sentido, é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de idéias e permite modelar a realidade e interpretá-la." (BRASIL, 1999, p.251)

Acreditamos não haver pontos de discórdia na afirmação de que há diferenças entre a linguagem comum e a linguagem matemática. Para a matemática, a negação de um conceito não é o uso de um antônimo, contrário ou oposto, o que normalmente ocorre na linguagem comum, par não é antônimo de ímpar, por exemplo. Na matemática temos também definição por inclusão: o quadrado é um tipo especial de retângulo. Outras confusões surgem quando se trata do "ou" utilizado na matemática. Seria um "ou" inclusivo, união entre conjuntos, que tem significado diferente daquela utilizada na linguagem comum, do dia-a-dia, um "ou" excludente?

Visando desenvolver conexões produtivas entre teoria e prática, propomos um conjunto de atividades para oferecer um ambiente agradável e estimulador ao aluno, trazendo situações que propiciam momentos de *redescontextualizar* e *redespersonalizar* seu saber em relação aos conectivos lógicos: *se ... então*, *ou* e *e*. Para favorecer o entendimento desses conectivos, fornecemos subsídios para o aluno compreender algumas 'regras' utilizadas em Matemática, úteis em situações de 'demonstração' e 'verificação', procurando estabelecer em que medida é possível desenvolver, em alunos do ensino médio, o domínio e a habilidade de utilização das regras da lógica formal.

## LEITURAS SOBRE O TEMA DE PESQUISA

A ausência ou uso inadequado da lógica formal nos processos de ensino e aprendizagem de matemática traz "[...] a questão de como fazer para que o aluno se aproprie da lógica elementar matemática e a torne operacional" (MACHADO & NOGUEIRA, 2005, p.63). Professores "raramente têm consciência da necessidade do estabelecimento de normas que determinem o que é considerada uma explicação e uma justificativa matemática aceitável" (ibid p.65). Essas afirmações reforçam nossas inquietações e serão objetos de nossa pesquisa.

As autoras apresentam seus argumentos afirmando que "compreensão do que embasa o raciocínio matemático [...] é essencial para uma melhora qualitativa da aquisição de conhecimentos matemáticos." (ibid.p.64), e o ensino de regras básicas da lógica matemática se justifica, visto que "o conhecimento de regras da lógica matemática, (é) fundamental à compreensão do raciocínio matemático." (ibid.p.72).

A discussão sobre explicação e prova é utilizada, como porta de entrada para se enfocar a relevância da lógica formal nos processos de ensino e aprendizagem de matemática. A explicação tem importância nesses processos, onde ela serve, entre outras coisas, para que o professor possa entender o raciocínio do aluno, favorecendo uma intervenção caso seja preciso uma alteração na estrutura utilizada, objetivando a passagem “de uma argumentação descritiva para uma argumentação justificativa” (MACHADO & NOGUEIRA, 2005, p.64).

É importante auxiliar o aluno na passagem de uma argumentação apoiada em seqüências temporais para uma argumentação mais formal, utilizando de conjecturas e relações lógicas entre as etapas do processo da argumentação. Apresentamos dois fatores que contribuem negativamente para êxito do processo, a “lógica do cotidiano” (MACHADO & NOGUEIRA, 2005, p.67), e as “diferenças entre a linguagem matemática e a linguagem do dia-a-dia” (EPP, 2003, p.888, tradução nossa).

Com relação as diferentes linguagens, vamos utilizar os exemplos dados por EPP (2003 p.889) ao relatar que:

> Os pais que desejam comunicar a uma criança. ‘Você pode ir ao cinema se, e somente se, você terminar sua lição de casa’, raramente, se nunca, usa essa sentença. Normalmente os pais prometem ‘Se você terminar sua lição de casa, então você poderá ir ao cinema’ ou ameaçam ‘Você poderá ir ao cinema apenas se você terminar sua lição de casa’. Mas, os pais oferecendo a recompensa na primeira declaração levam a criança a entender que se a lição de casa não estiver terminada a criança não conseguirá (poderá) ir ao cinema (embora essa punição não é tecnicamente uma parte da declaração), e os pais punitivos, na segunda declaração, queriam, certamente, não ocultar a recompensa se a lição de casa estiver completa (embora a declaração não faça uma promessa). Similarmente, muitos alunos lendo o enunciado de um trabalho dizendo, ‘Aplicações serão consideradas se estas forem recebidas dentro do prazo’, assumindo que se a aplicação é submetida no prazo, ela será considerada. (tradução nossa)

Epp (2003) afirma que seus alunos possuem dificuldades em aceitar que “*p somente se q* é logicamente equivalente a “*se p então q*” e que na “linguagem diária as declarações *se-então* e *apenas-se*, são frequentemente interpretadas como *se-e-somente-se*” (tradução nossa).

## REFERENCIAL TEÓRICO

Como ocorre o desenvolvimento do raciocínio lógico nas pessoas? Esta questão será abordada a partir dos estudos de Vigotsky e Piaget, juntamente com seus colaboradores, que nos orientaram na elaboração e análise das atividades que compõem este trabalho.

Vigotsky, segundo Oliveira (1993), teve interesse especial no estudo dos processos mentais superiores, aqueles em que “O ser humano tem a possibilidade de pensar em objetos ausentes, imaginar eventos nunca vividos, planejar ações a serem realizadas em momentos posteriores.” (OLIVEIRA, 1993, p.26).

Luria, colaborador de Vigotsky, contribuiu com experimentos e teorias sobre o pensamento humano e apresenta exemplos para representar relações entre pensamento e linguagem simples como pensamento espacial, “eu vou a ...”, “estou sentado na ...” e relações mais complexas "o incêndio eclodiu em conseqüência de ...", "saí à rua, embora ...", afirmando que;

> Esses meios objetivamente surgidos na história da linguagem refletem não mais relações espaciais externas ou temporais, porém relações *lógicas* bem mais complexas, entre as quais se situam tanto as relações de causa e efeito, quanto as relações de inserção no todo, de condições, restrições parciais e outras que vêm sendo elaboradas ultimamente por outro campo da ciência – a lógica matemática – e são representadas por um sistema especial de sinais. (LURIA, 1979, p.103).

Piaget e Inhelder (1971) acreditam que o início das estruturas lógicas, o começo do uso delas, está nos pensamentos que tratam de solucionar tarefas de classificação, realizando diversas experiências com crianças e pré-adolescentes.

Diferentemente de Vigotsky, Piaget e Inhelder (1971) não atribuem tanta importância para a linguagem na formação e evolução das estruturas lógicas.

> Em resumo, desde o início, a linguagem favorece uma série de assimilações sucessivas que engendram outras tantas relações de semelhanças. [...] É por isso que a linguagem, por muito importante que seja o seu papel na elaboração das estruturas lógicas, não pode ser considerada, mesmo na criança normal, o fator essencial de formação dessas estruturas. (PIAGET, INHELDER, 1971, p.14-15)

Em um de seus trabalhos Piaget e Inhelder (1976), propõe estudos sobre uma passagem de uma lógica da criança para uma lógica do adolescente. Atribuem essa passagem a "uma estruturação operatória inteiramente nova, fundada sobre a lógica das preposições, e sobre um pensamento 'formal' distinto do pensamento operatório 'concreto' de 7 a 11 anos (pois este não exige mais do que algumas operações da lógica de classes e de relações)." (PIAGET, INHELDER, 1976, prefácio).

Encaminhamos então ao estudo desse pensamento formal, do ponto de vista do equilíbrio e do ponto de vista das estruturas, como sugere Piaget e Inhelder. (1976, p.184)

O possível no pensamento formal, mesmo independente da realidade, não está livre completamente. "O domínio do possível, atingido pelo pensamento formal, na realidade não é de forma alguma o do arbitrário, ou imaginação livre de qualquer regra e de toda objetividade." (PIAGET, INHELDER, 1976, p.192)

Na perspectiva da lógica, "o possível formal é o correlato obrigatório da noção de necessidade" e está relacionada ao fato de que "uma dedução que se refere a uma hipótese é necessariamente verdadeira, do ponto de vista formal, desde que seja correta, e isso independentemente do valor da hipótese admitida" (PIAGET, INHELDER, 1976, p.193). Nas palavras de Piaget temos:

> A conexão marcada pelas palavras "se... então" (implicação inferencial) consiste em ligar uma conseqüência necessária a uma afirmação simplesmente possível. [...] Ora, em que consiste este possível formal? É possível tudo que não é contraditório. (PIAGET, INHELDER, 1976, p.193)

## METODOLOGIA DA PESQUISA

A metodologia de pesquisa utilizada neste trabalho possui como características situações de análises e de aplicação, ou experimentação, como caracterizou Michèle Artigue, "[...] como um esquema experimental baseado sobre 'realizações didáticas' em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino". (Machado 1999, p. 199)

As análises a que nos referimos anteriormente são conhecidas por *análise a priori* e a *análise a posteriori*, e a confrontação entre essas análises resulta na *validação* da pesquisa, que nessa metodologia é interna,

> Com efeito, as investigações que recorrem a experimentações na sala de aula situam-se, a maioria das vezes, numa abordagem comparativa com validação externa dos desempenhos de grupos experimentais e de grupos testemunho. Este paradigma não é o da engenharia didática, que se situa no lado oposto, no registro dos estudos de casos, e cuja validação é essencialmente interna, fundada no confronto entre a análise a priori e a análise a posteriori. (ARTIGUE, BRUN, 1996, p. 197).

Para a descrição da metodologia da engenharia didática, Artigue (1996) apresenta quatro fases, determinadas temporalmente:

1. Análises prévias,
2. Concepção e análise *a priori* das situações didáticas da engenharia,
3. Experimentação,
4. Análise *a posteriori* e da validação.

As análises prévias, ou preliminares, constituem a busca de apoios teóricos didáticos gerais, em conhecimentos didáticos já adquiridos e análises preliminares, que Artigue (1996) afirma serem, em maioria,

> - a análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino,
> - a análise do ensino habitual e dos seus efeitos,
> - a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução,
> - a análise do campo de constrangimento no qual virá a situar-se a realização didáctica efectiva,
> - e, naturalmente, tendo em conta os objectivos específicos da investigação. (ibid, p.198)

Na análise *a priori*, que se compõe de uma parte descritiva e uma parte preditiva, como afirmada anteriormente, Artigue (1996) determina as ações:

- Descrevem-se as escolhas efctuadas ao nível local (remetendo-as, eventualmente, para escolhas globais), e as características da situação a-didáctica que delas decorrem,

- Analisa-se o peso que o investimento nesta situação pode ter para o aluno, particularmente em função das possibilidades de acção, de escolha, de decisão, de controle e de validação de que ele dispõe, uma vez operada a devolução, num funcionamento quase isolado do professor,
- Prevêem-se os campos de comportamentos possíveis e procura-se mostrar de que forma a análise efectuada permite controlar o sentido desses campos e assumir, em particular, que os comportamentos esperados, se intervierem, resultarão claramente da aplicação do conhecimento visado pela aprendizagem. (ARTIGUE, BRUN, 1996, p.205)

A fase de experimentação se baseia "no conjunto dos dados recolhidos quando da experimentação: observações realizadas nas sessões de ensino, mas também produções dos alunos na sala de aula ou fora dela." (ibid, p.208), com uso de questionários, testes individuais ou em pequenos grupos.

Machado (1999) detalha ainda mais o que seria uma experimentação para uma proposta de engenharia didática:

- A explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação,
- O estabelecimento do contrato didático,
- A aplicação dos instrumentos de pesquisa,
- O registro das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais, etc.).(MACHADO, 1999, p.206)

A autora destaca a possibilidade de eventuais correções da "rota prevista" (MACHADO, 1999, p.206), quando a experimentação possui mais de uma sessão, correções possíveis após uma análise *a posteriori* local, ou seja, uma análise após uma ou algumas sessões, comparando com as previsões contidas nas análises *a priori* realizadas.

Na quarta e última fase, da *análise a posteriori e da validação*, é que ocorre a confrontação entre as análises *a priori* e *a posteriori*. Para se validar ou refutar as hipóteses levantadas no início da engenharia contamos com os dados fornecidos pela experimentação, os quais receberão o tratamento pertinente ao objetivo a ser atingido, e apoiado nas análises prévias.

## APRESENTAÇÃO DAS ATIVIDADES

As atividades propostas neste trabalho foram inspiradas no uso do programa *Tarski's World*, criado pelos pesquisadores Barwise e Etchemendy (1996), com a intenção de propor ferramentas "[...] que poderiam facilitar a habilidade dos estudantes em visualizar o assunto abstrato em questão de lógica, e deste modo trabalhar mais eficientemente com estes." (BARWISE, ETCHEMENDY, 1996, p.2-3, tradução nossa).

Com o objetivo de ensinar lógica de primeira ordem, o programa "[...] permite que os estudantes representem mundos tridimensionais, inserindo objetos geométricos de vários tipos e tamanhos, e testar sentenças de primeira ordem para ver se elas são verdadeiras ou falsas nestes mundos.” (BARWISE, ETCHEMENDY, 1996, p.5, tradução nossa).

O ambiente oferecido pelo programa possibilitou a criação de diferentes exercícios “que requeriam argumentação dedutiva para sua solução” (BARWISE, ETCHEMENDY, 1996, p.6, tradução nossa).

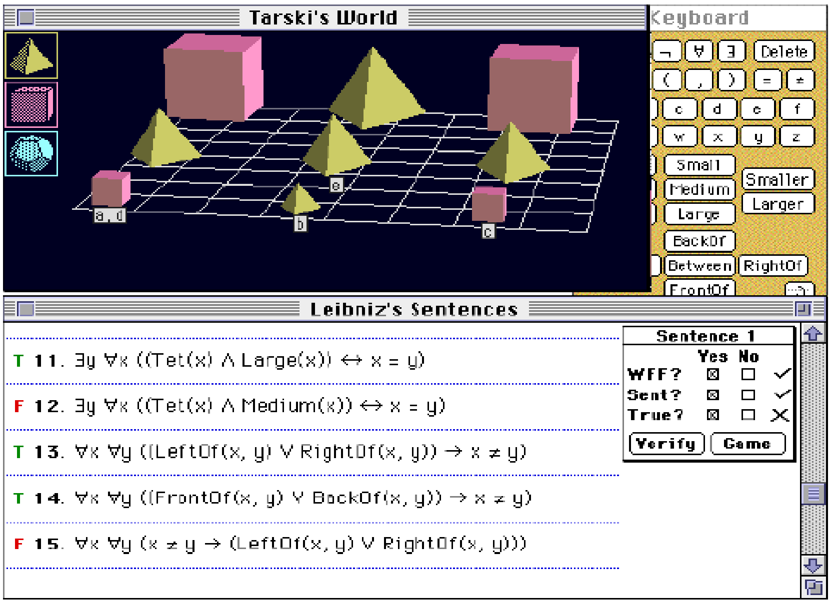



Figura 1 (BARWISE, ETCHEMENDY, 1996, p.6)

Na mesma linha de proposta há um applet[8], disponível na internet[9], com base no programa *Tarski’s World* e que oferece condições semelhantes mesmos objetivos.

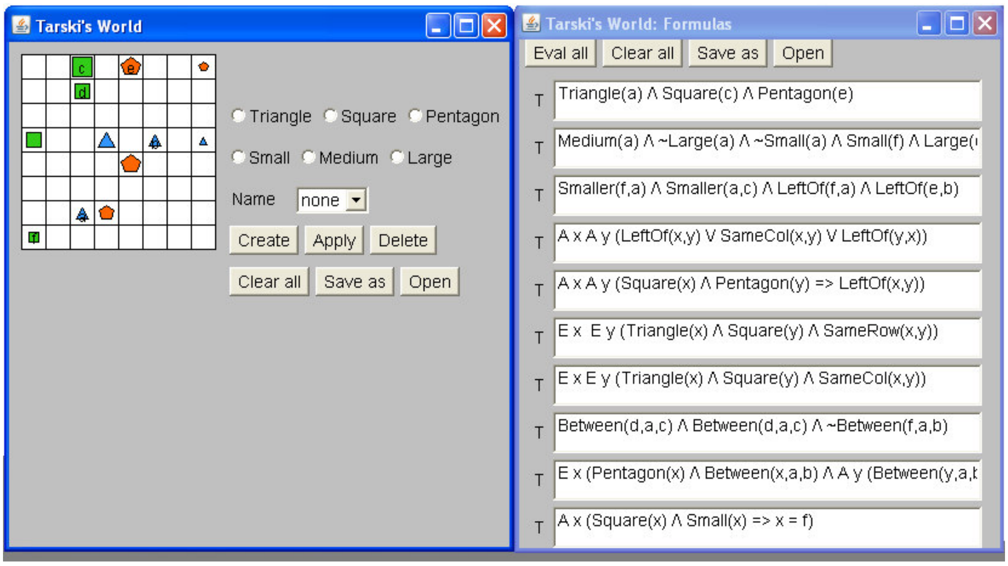



Figura 2 – Applet Tarski’s World

[8] Trecho de programação em linguagem ***Java*** inserido em documentos ***HTML***

[9] http://www.cs.plattsburgh.edu/~salvador/Tarski/ - acesso em 20 – maio – 2008.

Como a rapidez na construção de mundos, aos quais eram atribuídos nomes de importantes lógicos, e verificação das sentenças, características do applet podem atrapalhar os objetivos da atividade, optamos em utilizar a uma versão ‘concreta’, usando peças de E.V.A.[10] e tabuleiro em papelão, pois nosso objetivo era que o aluno explorasse situações da lógica formal

Nestas atividades o aluno tem papel ativo e, na medida do possível, também criativo. A oportunidade de experimentar e avaliar sua compreensão a respeito da estrutura da lógica clássica, ou “a verdadeira compreensão é demonstrada quando o aluno consegue pensar e agir flexivelmente com aquilo que aprendeu”. (Perkin apud NUNES 2007, p.222).

Defendemos que nossas atividades “são instigantes e desafiadores o suficiente para colocar o aluno num papel ativo de reflexão, investigação e mesmo criação” (NUNES; MORAES, 2007, p.222), pois elas oferecem um espaço para uso de diferentes formas de linguagem e uma mudança da cultura da sala de aula.

As atividades foram aplicadas com alunos do 2º ano do ensino médio, na faixa etária entre 15 e 17 anos. Os teóricos Vigotsky e Piaget justificam nossa escolha, pois são alunos que já tiveram grande contato com conceitos matemáticos, possuem uma vida social intensa e crítica, e se encontram em fase de desenvolvimento apropriada, pois “o adolescente, ao contrário, superpõe a lógica das proposições à das classes e das relações, e assim desenvolve, pouco a pouco (atingindo seu patamar de equilíbrio por volta de 14-15 anos), um mecanismo formal fundamentado”. (PIAGET, INHELDER, 1976, p.260)

As atividades aconteceram em uma escola em que o aplicador não tem qualquer vínculo, facilitando o estabelecimento de um ambiente diferente daquele em que os alunos estavam acostumados e descaracterizando uma possível cobrança em situações de avaliação com objetivo de gerar ‘notas’.

Ficou estabelecido que as atividades fossem realizadas em duplas que identificadas como grupo-cor, favorecendo tanto a troca de idéias entre os alunos e a gravação em áudio e vídeo, quanto apoio para a análise *a posteriori* das atividades.

Estabelecemos o número máximo de dez duplas em virtude da demanda de atenção necessária para a aplicação, verificação, análise e retorno das atividades realizadas.

Foi proposto um total de sete encontros. Duas duplas tiveram as atividades gravadas em áudio, uma dupla em vídeo, e todas as duplas geraram folhas com as respostas das atividades propostas, além de contar com relatórios de dois observadores.

[10] EVA - Etil Vinil Acetato - material sintético similar a borracha.

Os encontros foram planejados para duração de 1 hora e 30 minutos. Os temas da lógica formal e atividades que pretendíamos abordar foram distribuídos nos encontros da seguinte forma.

| Encontro | Data | Atividades programadas | |
|---|---|---|---|
| 1º Encontro | 27/04/2007 | Apresentações do aplicador, proposta do trabalho e material. | |
| | | Atividade I - Reconhecimento | I.1 – análise de sentenças |
| | | | I.2 – construção do mundo |
| | | | I.3 – desafio dos mundos |
| 2º Encontro | 04/05/2007 | Atividade II - Negação e Conjunção | II.1 – análise de sentenças |
| | | | II.2 – construção do mundo |
| | | | II.3 – desafio dos mundos |
| 3º Encontro | 11/05/2008 | Atividade III - Disjunção | III.1 – análise de sentenças |
| | | | III.2 – construção do mundo |
| | | | III.3 – desafio dos mundos |
| 4º Encontro | 18/05/2008 | Atividade VI - Revisão | IV.1 – análise de sentenças |
| | | | IV.2 – construção do mundo |
| | | Sentenças em linguagem natural e matemática | |
| 5º Encontro | 25/05/2007 | Atividade V - Implicações e Bicondicional | V.1 – análise de sentenças |
| | | | V.2 – construção do mundo |
| | | | V.3 – desafio dos mundos |
| 6º Encontro | | Quantificadores | |
| 7º Encontro | 15/06/2008 | Atividade VII - Finalizando | VII.1 – análise de sentenças |
| | | | VII.2 – determinar as figuras |
| | | | VII.3 – descrever estratégia |
| | | | VII.4 – sentenças em português |
| | | | VII.5 – opinião sobre a oficina |
| | | Uso do applet *Tarski's World* | |

Tabela 1

Para os diferentes encontros e temas abordados, fixamos uma estrutura para as atividades e formulário do observador, deixando a possibilidade de alterações quando houvesse necessidade e respeitando a metodologia adotada.

Estrutura básica dos encontros

- Uma breve retomada da atividade anterior, apresentando o desempenho do grupo, e expondo alguns fatos, incorreções ou questões relevantes, que foram detectados durante a atividade ou após nas análises das mesmas, além de observações ou questões por eles elaboradas.
- Apresentação e explicação do conteúdo a ser trabalhado naquele dia, apresentações realizadas em PowerPoint e eventualmente quadro negro e giz.
- Entrega do material de cada dupla, identificado através de cor.
- Entrega da folha de respostas com as atividades 1 e 2.
- Recolhimento da folha de respostas com as atividades 1 e 2.

- Entrega da folha de atividade com a atividade 3.
- Recolhimento da folha de atividade com a atividade 3.
- Recolhimento do material de cada dupla.

Apresentação do material utilizado nos encontros:

I. O tabuleiro, com as suas características, quantidade de linhas e colunas, semelhantes aos que serão utilizados nas folhas de atividades.

II. As peças de E.V.A., que representam as figuras planas triângulo, quadrado e pentágono, com três tamanhos e cores diferentes, para serem utilizados no tabuleiro com livre opção de uso por parte do grupo.

III. A pasta de cada dupla, contendo, além das peças de E.V.A. e do tabuleiro, uma folha com orientações para a "tradução" das sentenças utilizadas nas atividades, lápis, caneta, borracha e etiquetas. As etiquetas serão utilizadas para identificar as figuras de E.V.A. colocadas no tabuleiro.

## EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Neste trabalho descreveremos apenas como ocorreu o trabalho da atividade II.

| Encontro | Data | Atividades programadas | |
|---|---|---|---|
| 2º Encontro | 04/05/2007 | Atividade II - Negação e Conjunção | II.1 – análise de sentenças |
| | | | II.2 – construção de um mundo |
| | | | III.3 – desafio dos mundos |

A atividade em geral tem por objetivo apresentar como se nega uma sentença, no sentido da lógica formal, que difere da maneira coloquial. Afirmar que *a* é pequeno (small), não é a negação de que *a* é grande (large), por exemplo. Apresentar o conectivo lógico ***e*** assim como fazer juízo de sentenças com a utilização desse conectivo.

**Análise a priori**

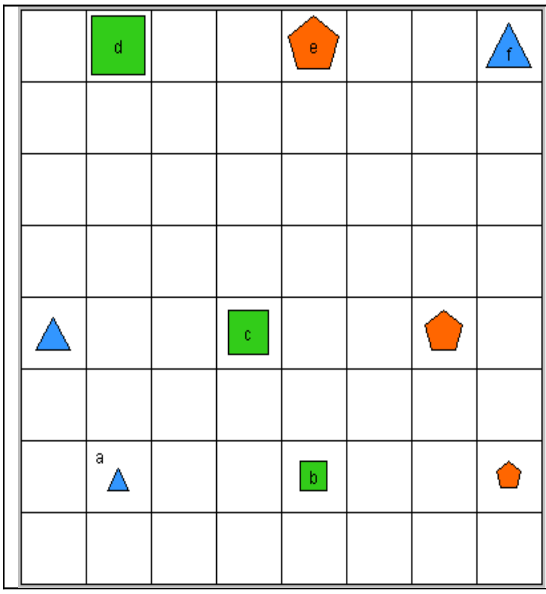
Atividade II. 1 – Análise de sentenças

Procura-se familiarizar os participantes com os novos símbolos nas sentenças, em que (~) significa a negação da sentença e /\ significa a conjunção (conectivo e).

O uso dos parênteses nas sentenças permite ampliar as possibilidades do uso da negação e da conjunção, visando debate e interação entre os alunos, pois amplia o grau de dificuldade de se estabelecer juízo em relação a uma sentença.

Segue abaixo a proposta do exercício.

1. Escreva V ou F de acordo com o mundo de Wittgenstein




| | | |
|---|---|---|
| 1 | ~Large(f) | |
| 2 | ~Medium(b) | |
| 3 | ~LeftOff(f,a) | |
| 4 | ~Between(c,c,c) | |
| 5 | ~SameRow(d,e) | |
| 6 | ~Square(b) | |
| 7 | ~(~Triangle(e)) | |
| 8 | Triangle(f) Λ Large(f) | |
| 9 | Triangle(f) Λ Small(f) | |
| 10 | Triangle(f) Λ ~Large(f) | |
| 11 | ~Triangle(f) Λ Large(f) | |
| 12 | ~(Triangle(f) Λ ~Large(f)) | |
| 13 | ~(~Triangle(f) Λ ~Small(f)) | |
| 14 | ~(~Triangle(c) Λ Pentagon(e)) | |
| 15 | ~(LeftOff(e,d))Λ LeftOff(d,e) | |

Figura 3

As sentenças de 1 a 6 apresentam o conectivo da negação (~).

A 7ª sentença propõe a análise de uma sentença com o uso da negação-da-negação. Esta estrutura pretende promover análise de frases utilizadas no dia a dia, como por exemplo ‘Não tem ninguém aqui’.

As sentenças 8 e 9 apresentam de forma simples o uso do conectivo ***e***, e nas duas seguintes, o acréscimo da negação, mas sem oferecer aumento no grau de dificuldade.

As sentenças 8, 9, 10 e 11, quando analisadas conjuntamente, reforçam uma característica muito importante presente nas conjunções, a necessidade do critério de verdade para todas as premissas envolvidas na sentença para que a sentença seja classificada como verdadeira (V), bastando uma premissa falsa (F) para tornar a sentença falsa.

Nas sentenças seguintes, com o uso dos parênteses, o grau de dificuldade é elevado, exigindo maior concentração na leitura, verificando o que está sendo negado, ou seja, verificar o escopo da negação. Esta característica fica evidente ao comparar as sentenças 10 e 12, em que a 12ª sentença é a negação da 10ª.

A negação utilizada na sentença 15 apenas no primeiro conjunto reforça a necessidade de uma leitura mais atenta quanto ao uso dos parênteses.

Com as sentenças 10, 11 e 12 espera-se responder a provável dúvida em relação à utilização da negação da questão 12. Pode ser utilizada a propriedade distributiva na interpretação da sentença?

**Atividade II. 2- Construção de um mundo**

Apresenta um grau de dificuldade maior que a proposta da atividade anterior.

Segue abaixo a proposta do exercício.

1. Construa um mundo para que as sentenças abaixo sejam simultaneamente verdadeiras.

| | |
|---|---|
| 1 | ~(~Triangle(a) /\ Pentagon(a)) |
| 2 | Triangle(d) /\Triangle(a) |
| 3 | Pentagon(f) /\ SameCol(f,d) |
| 4 | ~(Larger(d) /\ Larger(e)) |
| 5 | Between(d,e,f) /\ ~Smaller(a,f) |
| 6 | SameSize(a,a) /\ LeftOf(d,e) |
| 7 | ~(SameCol(d,f) /\ ~(Triangle(d))/\~(Pentagon(d)) |

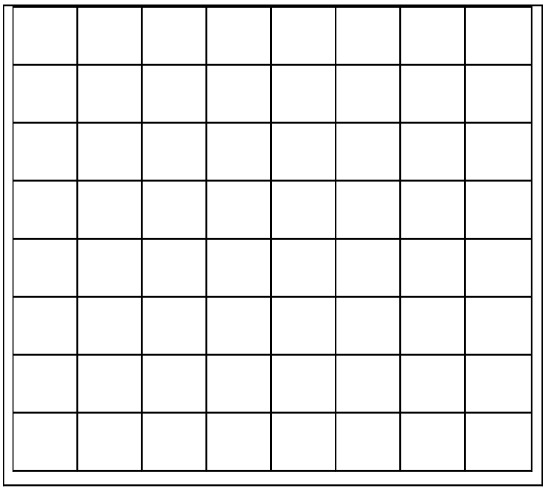


Figura 4

As duas primeiras sentenças foram dispostas para promover o debate sobre a forma do elemento *a*, pois na primeira sentença fica estabelecida a impossibilidade de ser pentágono, porém não impossibilita de *a* ser quadrado. Na segunda sentença se estabelece *a* e *d* como triângulos.

A sentença 3 estabelece a forma de *f* e a posição de *f* em relação a *d*, mesma coluna.

A sentença 4 é utilizada para estabelecer que *e* e *d* não podem ser ambos grandes.

A sentença 5 estabelece a posição do *e*, que deve estar na mesma coluna de *d* e *f*, estando *d* entre *e* e *f*, ver 3ª sentença, e a impossibilidade de *a* ser menor que *f*, destacando que não há impedimento de serem do mesmo tamanho.

A 6ª sentença estabelece a posição de *d* em relação a *e*, pois a primeira premissa não acrescenta nenhuma informação sobre o mundo proposto, pois na lógica em questão, o elemento *a* ter o mesmo tamanho que ele mesmo é verdade em qualquer mundo.

A última sentença tem a finalidade de reforçar a observação dos parênteses e o escopo da negação, pois a posição de *d* e *f* e a forma de *d* já haviam sido estipuladas nas sentenças anteriores.

**Atividade II.3- Desafio dos mundos.**

A atividade que possibilita a um grupo criar seu próprio mundo para desafiar outro, solicitava que escrevessem oitos sentenças e exigindo o mínimo de cinco para a criação de seu mundo.

**Experimentação da atividade II**

A atividade foi aplicada em 04 de maio de 2007, teve seu início e término nos horários previstos. Tivemos a formação de 9 grupos (duplas), contando com 9 meninas e 9 meninos. Apresentaremos a análise das atividades realizadas por duas duplas.

Atividade II.1- Análise de sentenças.

<table>
<tr><th>Dupla</th><th>Tempo</th><th>Grau de dificuldade (0-10)</th><th>Uso do tabuleiro</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Azul II</td><td>4 min.</td><td>3</td><td>Não</td></tr>
<tr><td colspan="3">Observações</td></tr>
<tr><td colspan="3">- “Itens 13, 14 e 15: Discussão entre os dois alunos a respeito da colocação e significado do conectivo <u>e</u>”.<br>O grupo errou as sentenças 12 e 13. Como a dupla acertou a 10ª sentença, provavelmente não perceberam que a 12ª se tratava da negação da 10ª.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Rosa</td><td>5 min.</td><td>9</td><td>Não</td></tr>
<tr><td colspan="3">Observações</td></tr>
<tr><td colspan="3">- “Na atividade 1, questão 6, houve uma hesitação da dupla.”</td></tr>
</table>

A incidência de erros foi pequena, além das duas sentenças citadas acima, apenas a última sentença provocou o erro de uma dupla. As ‘marcas’ deixadas na folha de atividade reforçam análise na determinação do escopo da negação.

Atividade II – 2- Construção do mundo.

<table>
<tr><th>Dupla</th><th>Tempo</th><th>Grau de dificuldade (0-10)</th><th>Uso do tabuleiro</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Azul II</td><td>15 min.</td><td>6</td><td>Sim</td></tr>
<tr><td colspan="3">Observações</td></tr>
<tr><td colspan="3">- “Apresentam mais dificuldade na interpretação das sentenças”.<br>- “Os alunos ficam em dúvida se está ocorrendo erro na sentença 7.”<br>- “Não conseguem concluir a construção do mundo, as sentenças parecem ser contraditórias”.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Rosa</td><td>20 min.</td><td>5</td><td>Não</td></tr>
<tr><td colspan="3">Observações</td></tr>
<tr><td colspan="3">- “Na atividade 2 o último item provocou muita discussão, uma aluna disse que esse item é demorado e a outra disse que é complicado. No tabuleiro a dupla disse que pensou certo, mas que desenhou errado.”<br>A última parte do comentário trata-se da justificativa para o erro presente em sua folha de atividade conferida por uma dupla ‘rival’.</td></tr>
</table>

A partir das análises das folhas de atividades, percebemos que a incidência de erros no exercício aumentou, como previsto, em relação atividade do encontro anterior, a de reconhecimento.

A 3ª sentença provocou um erro, a dupla não observou a mesma coluna de *f* e *d*, uma dupla errou a 5ª sentença por estabelecer *a* menor que *f*, provavelmente por não observar a negação na premissa. A 6ª sentença errada se apresentou em uma dupla, Rosa, aquela citada pelo observador, que não posicionou *d* a esquerda de *e*.

A última sentença, que tanto motivou debate, não provocou erro em dupla alguma, mas possui maior quantidade de marcas nas folhas de resposta, que em sua maioria procura reforçar a abertura e fechamento dos parênteses.

Atividade II.3- Desafio dos mundos.

Tivemos quatro duplas que utilizaram as oito sentenças e apenas duas cinco sentenças. As outras duplas seis e sete sentenças.

<table>
<tr><th>Dupla</th><th>Tempo</th><th>Grau de dificuldade (0-10)</th><th>Uso do tabuleiro</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Azul II</td><td>30 min.</td><td>8</td><td>Não</td></tr>
<tr><td colspan="3">Observações</td></tr>
<tr><td colspan="3">- “Usaram uma folha como rascunho e montaram um tabuleiro na folha.”</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Rosa</td><td>15 min.</td><td>7</td><td>Sim</td></tr>
<tr><td colspan="3">Observações</td></tr>
<tr><td colspan="3">- “A dupla demorou muito para iniciar (1ª sentença), mas depois que se apropriaram do processo de criação de sentenças fizeram as outras em menos tempo”.</td></tr>
</table>

A resolução dos desafios gerou alguns erros e grande movimentação.

<table>
<tr><th>Dupla</th><th>Tempo</th><th>Grau de dificuldade (0-10)</th><th>Uso do tabuleiro</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Azul II</td><td>5 min.</td><td>4</td><td>Não</td></tr>
<tr><td colspan="3">Observações</td></tr>
<tr><td colspan="3">O observador da dupla Azul II não fez comentários relevantes.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Rosa</td><td>10 min.</td><td>9</td><td>Sim</td></tr>
<tr><td colspan="3">Observações</td></tr>
<tr><td colspan="3">O desafio da dupla Rosa, que consta de 8 sentenças.<br>- “A dupla descobriu um erro e chamou um elemento do outro grupo para discutir o erro. O elemento da outra dupla concordou que tinha cometido um erro”.<br>- ”A atividade em geral despertou muito interesse dos alunos. As interações ao longo do encontro foram intensas entre os componentes do grupo”.</td></tr>
</table>

**Análise a posteriori da atividade II**

As diferentes formas de coletarmos dados, folha de resposta, audiovisual e observadores se mostraram redundantes para a análise a posteriori.

A característica da dupla negação não gerou o debate esperado, porém o uso dos parênteses, a associação e a propriedade distributiva corresponderam às nossas expectativas, mobilizando conhecimentos estudados em matemática e nossa proposta.

O uso do tabuleiro pela maioria dos grupos na construção do mundo e o não uso nas outras atividades, leva-nos a refletir sobre a necessidade do ‘concreto’ para essa atividade, pois com essa estratégia não ocorre a criação de mundo logicamente impossível, Smaller(a,f) $\wedge$ SameSize(a,b) $\wedge$ Smaller(f,b), por exemplo.

Acreditamos na mobilização de pensamentos com estrutura lógica formal, tanto na proposta de negação quanto na conjunção, sendo postos em comparação ao pensamento comum, ou seja, ao negar que b é grande e triângulo, não impossibilita b ser grande ou triângulo, por exemplo.

As análises das demais atividades estão sendo realizadas e as possíveis contribuições a esta pesquisa permitirão o aprimoramento e a conclusão de nosso trabalho.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


ARTIGUE, Michèle, BRUN, Jean (Org.). ENGENHARIA DIDÁCTICA: DIDÁCTICA DAS MATEMÁTICAS. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. 193-217 p. (Horizontes Pedagógicos).

BARWISE, Jon, ETCHEMENDY, John. Computers, Visualization, and the Nature of Reasoning. pub. em 1996. Disponível em: <http://ggww2.stanford.edu/GUS/openproof/CVandNR.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2008.

BARWISE, Jon, ETCHEMENDY, John. Language, Proof and Logic. Stanford: Csli Publications, 2000. Center for the Study of Language and Information.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Ministério da Educação (MEC). Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Governo Federal, 2006. 2 v.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Ministério da Educação (MEC). Parâmetros Curriculares Nacionais: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: Governo Federal, 1997. 3 v.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Ministério da Educação (MEC). Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: Governo Federal, 1999.

BROUSSEAU, Guy, BRUN, Jean (Org.). FUNDAMENTOS E MÉTODOS DA DIDÁCTICA DA MATEMÁTICA: DIDÁCTICA DAS MATEMÁTICAS. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. 35-113 p. (Horizontes Pedagógicos).

EPP, Susanna S. The Role of logic in Teaching Proof. The America Mathematical Monthly: MAA, United States of America, p. 886-899. 01 dez. 2003.

JAPIASSÚ, Hilton, MARCONDES, Danilo. Dicionário Básico de Filosofia. 3 ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2006.

KANT, Immanuel. CRÍTICA DA RAZÃO PURA. 5. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

LURIA, Alexander Romanovich. CURSO DE PSICOLOGIA GERAL: Linguagem e Pensamento. 8. ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira S. A., 1979. 4 v.

MACHADO, Nílson José, CUNHA, Marisa Ortegoza da. Lógica e Linguagem cotidiana: verdade, coerência, comunicação, argumentação. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. (Tendências em educação matemática).

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - UMA (NOVA) INTRODUÇÃO. São Paulo: Educ - PUC, 1999. 197-208 p.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara, NOGUEIRA, Maria Tereza De Lima Carvalho. A LÓGICA ELEMENTAR DA MATEMÁTICA E O ENSINO SUPERIOR. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 7, n. 1, p.63-80, 2005. Anual.

MORENTE, Manuel Garcia. FUNDAMENTOS DE FILOSOFIA: LIÇÕES PRELIMINARES. 8. ed. São Paulo: Mestre Jou, 1980.

NUNES, Cesar Augusto Amaral (Org.). O Bom Uso de Objetos de Aprendizagem. In: MORAES, Ubirajara Carnevale de. Tecnologia Educacional e Aprendizagem: O Uso dos Recursos Digitais. São Paulo: Livro Pronto, 2007. p. 215-231.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. VYGOTSKY: APRENDIZADO E DESENVOLVIMENTO UM PROCESSO SÓCIO-HISTÓRICO. São Paulo: Scipione, 1993. (PENSAMENTO E AÇÃO NO MAGISTÉRIO).

OTTE, Michael. O FORMAL, O SOCIAL E O SUBJETIVO: UMA INTRODUÇÃO À FILOSOFIA E À DIDÁTICA DA MATEMÁTICA. São Paulo: Unesp, 1993.

PIAGET, Jean, INHELDER, Bärbel. Da lógica da criança à lógica do adolescente. São Paulo: Livraria Pioneira, 1976.

PIAGET, Jean, INHELDER, Bärbel. Gênese das Estruturas Lógicas Elementares. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1971.

ROHDEN, Luiz. Hermenêutica filosófica: Entre a linguagem da experiência e a experência da linguagem. São Leopoldo: Unisinos, 2005. (Coleção idéias).

STEPHANOU, Lambros, PITTA-PANTAZI, Demetra. The impact of the intuitive rule "If A then B, if not A then not B", in perimeter and area tasks. In: PROCEEEDINGS 30TH CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 30., 2006, Prague. Research reports. Prague: Novotná J., Moraová H., Krátká M & Stehlíková N, 2006. v. 5, p. 177 - 184. CD-ROM.