O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Brasil entre 1810 e 1934: os cursos das escolas militares do Rio de Janeiro e da Escola Politécnica de São Paulo

Gabriel Loureiro de Lima

Orientador: Prof. Doutor Benedito Antonio da Silva

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP

Introdução

O presente trabalho se constitui numa síntese dos primeiros dados obtidos numa pesquisa que está sendo realizada em nível de doutoramento no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Por meio da referida pesquisa pretende-se estudar de que maneira o Cálculo Diferencial e Integral tem sido ensinado nos cursos de Licenciatura em Matemática de algumas universidades dos Estados de São Paulo e Rio de Janeiro de 1934 - quando foi criada a Universidade de São Paulo e o primeiro curso superior de Matemática do país - aos dias de hoje e qual tem sido o papel desses cursos de Cálculo na formação de futuros professores. Esse artigo trata do período anterior ao que pretendemos estudar, que foi pesquisado porque consideramos fundamental entender de que maneira o ensino desta disciplina era feito até 1934 para podermos compreender quais as transformações ocorridas a partir daquele ano. Analisamos então os cursos de Cálculo ministrados nas Escolas Militares do Rio de Janeiro durante o século XIX e o curso oferecido na Escola Politécnica de São Paulo entre 1893 e 1934.

O Ensino de Cálculo nas Escolas Militares do Rio de Janeiro

A disciplina Cálculo Diferencial e Integral foi introduzida pela primeira vez no currículo brasileiro em 1810 no curso Matemático da Real Academia Militar do Rio de Janeiro. De acordo com Silva (1999),

> Durante um período de mais de cem anos (1810-1920), a Academia Militar do Rio de Janeiro (e todas as suas ramificações: Escola Central, Escola Militar,

> Escola Politécnica, Escolas preparatórias) foi praticamente a única instituição onde os brasileiros poderiam adquirir conhecimentos matemáticos sistemáticos de nível superior e obter um diploma de bacharel e doutorado em ciências físicas e Matemáticas (SILVA, 1999, p.13).

O ensino de Cálculo Diferencial e Integral nessa instituição baseava-se no livro *Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et du Calcul Intégral* do francês Sylvestre François Lacroix (1765-1843). Lacroix era professor da Escola Politécnica de Paris ao lado de Legendre (1752-1833) e Lagrange (1736-1813) e se tornou o principal autor de livros-texto de sua época, tendo escrito compêndios de matemática para todos os graus de ensino à exceção do elementar. Com relação ao Cálculo, Lacroix escreveu duas obras de repercussão mundial: *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral* e o já mencionado *Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*, que pretendia ser uma versão simplificada da obra anterior. De acordo com Dhombres (1985), o *Traité du Calcul* "é um sumário de todos os resultados no cálculo integral e diferencial do século XVIII com citações precisas de autores originais" (1985, p. 105). No entanto, como afirma Moreira (2005):

> É o próprio Lacroix que afirma que não se trata unicamente de elaborar uma compilação, mas sobretudo de escolher, organizar, relacionar e uniformizar estes conteúdos matemáticos, de forma a apresentar um *corpus* unificado e ordenado, para que as diferenças individuais sejam apagadas e apareça em todas a "precisão e clareza" por igual. Portanto, o que procura Lacroix é uma nova organização, formatização e uniformidade de conteúdos, que, ao apagar as diferenças reduz e unifica os "métodos", e portanto maximiza o ensino, no sentido em que encaminha os estudantes para os resultados verdadeiramente significativos e importantes que existem nesta matéria até então (MOREIRA, 2005, p.175).

Boyer (1949, p. 264) a respeito da mesma obra afirma que talvez seja "o mais famoso e ambicioso livro no tema [cálculo] que apareceu na época". O *Traité Élémentaire de Calcul* atingiu considerável popularidade, tendo sido traduzido para várias línguas ao longo do século XIX e constantemente reeditado. Em 1812, esta obra foi traduzida para o português por Francisco Cordeiro da Silva Torres Alvin (1775-1856), professor da Academia Militar do Rio de Janeiro, e se tornou, de acordo com Silva (1996), o primeiro livro-texto de Cálculo, em língua portuguesa, a ser adotado para o ensino da matemática superior no Brasil, permanecendo durante décadas como a principal referência teórica para o ensino desta disciplina no país.

O texto traduzido por Alvin era fiel ao original e se dividia em duas partes independentes: a primeira sobre Cálculo Diferencial e a segunda sobre Cálculo Integral.

Era dividido em dois volumes: o primeiro contendo 489 páginas e o segundo 503. Além da grande quantidade de assuntos abordados, as obras sobre Cálculo de Lacroix apresentam como característica a total inexistência de figuras ao longo do desenvolvimento do conteúdo (elas encontram-se em anexo no final do livro) e um texto no qual o simbolismo matemático se alterna com grandes textos escritos em linguagem natural.

Lacroix considera, em sua obra, que o conceito de função é o ponto de partida para o desenvolvimento do Cálculo. No entanto, ele não apresenta uma definição satisfatória para este ente matemático. Lacroix apenas afirma que:

> Para exprimir que uma quantidade depende de uma ou mais outras, por operações quaisquer ou mesmo por relações impossíveis algebricamente, mas cuja existência é determinada por certas condições, dizemos que a primeira é função das outras. O seu uso esclarecerá o seu significado.

O conceito de limite também não é apresentado na obra de Lacroix. Há apenas referência à palavra durante a apresentação do conceito de derivada, mas sem nenhuma definição ou esclarecimento maior. Considera a função $u = ax^2$ e faz um acréscimo na variável x obtendo $u' = a(x^2 + 2hx + h^2)$. Em seguida, subtrai u de u' e depois divide tudo por h. Na expressão obtida, $\frac{u'-u}{h} = 2ax + ah$, percebe que uma das parcelas não depende do valor particular do aumento h, enquanto que a outra parcela é afetada por este valor. Afirma então que:

> Se concebe que esta quantidade vá diminuindo, o resultado se aproximará sem cessar de 2ax e não lhe será igual senão supondo h =0, de sorte que 2ax é o **limite** da relação $\frac{u'-u}{h}$ isto é, o valor para o qual ela tende a medida que a quantidade h diminue, e do qual pode aproximar-se-á tanto quanto se quiser.

Para se referir à derivada, Lacroix seguiu as idéias de Leibniz (1646-1716) e utilizou o termo *coeficiente diferencial*, apresentando os conceitos de *diferença* e *diferencial*. Utilizando, como exemplo, a função $u = ax^3$, introduziu as idéias de diferença e de diferencial:

> Tem-se obtido na expressão u'-u = $3ax^2h + 3axh^2 + ah^3$ o desenvolvimento da diferença de dois estados da função u, ordenado segundo as potências do aumento h, que se supõe a variável x, e o limite $3ax^2$ da relação dos aumentos u'-u e h, não depende senão da consideração do primeiro termo $3ax^2h$ desta diferença. Este primeiro termo não sendo senão uma porção da diferença, nós o chamaremos de **diferencial**, e o designaremos por du, servindo-nos da letra d,

> como de uma característica, teremos, pois no exemplo de que tratamos du = $3ax^2h$. Para passar daqui para o limite buscado, será necessário dividir por h, e obter-se-á $\frac{du}{h} = 3ax^2$ [...] escreveremos pois em lugar da quantidade h o sinal dx, a fim de conservar a uniformidade e teremos de $du = 3ax^2dx$ e $\frac{du}{dx} = 3ax^2$, a primeira expressão será a diferencial de u ou de ax^3 e a segunda que exprime a relação das mudanças simultâneas da função e da variável, tomará o nome de **coeficiente diferencial**, porque a quantidade quando ela representa não é outra coisa senão o multiplicador da diferencial dx na expressão da diferencial du. Segue-se daqui, que o limite da relação dos aumentos ou o coeficiente diferencial da função se obterá dividindo a diferencial da função pela diferencial da variável, e reciprocamente obter-se-á o diferencial multiplicando o limite da relação dos aumentos, ou o coeficiente diferencial pela diferencial da variável.

O conceito de integral é apresentado por Lacroix como sendo o inverso da derivada. O autor afirma que o objetivo do Cálculo Integral é "remontar" os coeficientes diferenciais das funções que foram derivadas. No entanto, pondera que é pouco dizer que as composições dos coeficientes diferenciais das funções procuradas são dadas imediatamente pelas variáveis independentes ou que são somente uma equação entre qualquer um desses coeficientes e uma ou várias dessas variáveis. Afirma, porém, que o primeiro caso é simples:

> Tome o coeficiente diferencial de primeira ordem de uma função de x
>
> $$\frac{d\gamma}{dx} = X \text{ ou } d\gamma = X \cdot dx$$
>
> A função procurada é aquela cuja derivada é $X \cdot dx$, e isto é indicado por:
>
> $$\gamma = \int X \cdot dx$$
>
> A característica $\int$ é a inversa da característica d, de maneira que
>
> $$\int du = u \text{ e } d\int X \cdot dx = X \cdot dx.$$

Na seqüência dessa definição, Lacroix aborda as técnicas de integração e, depois de muito trabalho feito, (mais de 100 páginas somente de técnicas) considera a expressão: $\int X.dx = f(x) + C$, onde f(x) designa a função obtida no processo de integração e C a constante arbitrária. Supondo que essa integral se anula para $x = a$, resulta que $f(a) + C = 0$, de onde se obtém $C = -f(a)$ e $\int X.dx = f(x) - f(a)$. Conclui, desta forma, que a integral $\int X.dx$ nada mais é do que a diferença entre o valor que f(x) assume quando

$x = a$ e o valor que f(x) assume quando a mesma variável x assumir um outro valor qualquer. Para $x = b$ tem-se, por exemplo, que $\int X.dx = f(b) - f(a)$. Diz que o valor $x = a$, para o qual a integral se anula, é a origem da integral, onde ela começa; já o valor $x = b$ é o ponto onde devemos parar, ou seja, onde a integração está completa. Feita essa observação, diz que os valores $x = a$ e $x = b$ são chamados de limites de integração e que, quando esses limites são conhecidos, a integral é chamada de definida e denotada por $\int_a^b X.dx$. Quando não são conhecidos os limites de integração ou não é dada a origem da integral, ela é denominada indefinida. Afirma que o cálculo da integral definida $\int_a^b X.dx$ é efetuado determinando-se, através da integração, a função f(x), calculando-se f(a) e f(b) e, em seguida subtraindo f(a) de f(b), ou seja, $\int_a^b X.dx = f(b) - f(a)$.

Sem citar o nome, essa era a forma como Lacroix apresentava o Teorema Fundamental do Cálculo. A idéia de integral como sendo a área da regiâo abaixo de uma curva só é citada mais de 100 páginas depois do início da abordagem de integrais, quando afirma que a integral pode ser vista com uma soma das áreas dos retângulos abaixo de uma curva.

Ilustramos acima, de maneira resumida, como os conceitos centrais do Cálculo: funções, limite, derivadas e integrais eram trabalhados nesses cursos das Escolas Militares que seguiam o livro-texto de Lacroix. Quase nada mudou no cenário brasileiro de ensino de Cálculo até o final do século XIX. Em 1842, José Saturnino da Costa Pereira (1771-1852) publicou *"Elementos do Cálculo Diferencial e de Cálculo Integral Segundo o Sistema de Lacroix, Para Uso da Escola Militar"*. Essa é, possivelmente, a primeira tentativa brasileira de redigir um livro-texto de Cálculo. Porém, de acordo com Silva (1996), o autor encontrava-se ainda muito apegado ao estilo de Lacroix e, por isso, essa obra parece não representar qualquer alteração no modo como o Cálculo vinha sendo ensinado no país. Ainda nessa época, foi escrito no Brasil por Albino Carvalho: "*Cálculo Diferencial e Integral"*, de 1874 que, segundo a mesma autora, ainda não foi localizado e analisado.

A seguir analisaremos o curso de Cálculo da Escola Politécnica de São Paulo de sua fundação em 1893 até 1934 quando é fundada a Universidade de São Paulo.

O Ensino de Cálculo na Escola Politécnica de São Paulo até 1934

A Escola Politécnica de São Paulo foi criada em 1893, nos moldes da Eidgenössische Technische Hochschule de Zurique, mas, de acordo com Lima (2006), na prática seguia as concepções e técnicas estabelecidas pela École Polytechnique de Paris.

Segundo Oliveira (2004) em seu estudo intitulado *O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral na Escola Politécnica de São Paulo, no ano de 1904: uma análise documental*, o Cálculo ensinado na Escola Politécnica de São Paulo tomava como referencia o livro *Premiers Élements du Calcul Infinitesimal* de Hyppolite Sonnet, que trata o Cálculo na concepção de Leibniz (1646-1716) e Newton (1642-1727), dando ênfase aos infinitésimos e à noção intuitiva de limite. De acordo com Lima (2006, p.68), a cadeira de Cálculo Infinitesimal da Poli, no período de 1895 a 1932 esteve a cargo de dois professores: Urbano de Vasconcellos (1864-1901), que lecionou de 1895 a 1901, e Rodolfo Baptista de San Thiago (1870-1933), que ficou à frente desta disciplina de 1901 até 1932. Com sua aposentadoria, em maio de 1933 assume o seu lugar o professor José Octávio Monteiro de Camargo. A mesma autora afirma que mesmo com a junção do Cálculo com a Geometria Analítica (entre 1901 e 1918) e da cronologia de tempos diferentes, a disciplina foi ministrada por Vasconcellos e San Thiago com programas semelhantes organizados, de acordo com Oliveira (2004, p.30), segundo a distribuição seguinte: 1) funções; 2) método da exaustão; 3) método de Leibniz; 4) método de Newton; 5) método de Lagrange; 6) Cálculo Diferencial (como conseqüência dos três métodos anteriores); 7) aplicações analíticas e geométricas do Cálculo Diferencial; 8) Cálculo Integral; 9) métodos de integração; 10) integrais definidas e 11) aplicações geométricas do Cálculo Integral.

A pesquisa de Oliveira (2004) foi realizada tomando por base "uma interpretação das aulas expositivas, do ano de 1904, do professor San Thiago, [...]. Essa interpretação foi organizada por um seu aluno [Adriano] Goulin, na forma de um caderno" (OLIVEIRA, 2004, p. 31) que:

> Apresenta uma longa e interessante introdução com as noções de função e continuidade, acrescidas de explicações e orientações sobre os denominados métodos especiais da análise infinitesimal: o método de exaustão; empregado por Arquimedes, o método de Leibniz, dos infinitésimos; o de Newton, das primeiras e últimas razões, e o método de Lagrange, chamado das derivadas (OLIVEIRA, 2004, p.31).

O conceito de função iniciava o curso de Cálculo de San Thiago e era apresentado da seguinte forma:

> Funcção de uma ou mais quantidades é uma expressão analítica em que entram estas quantidades, combinadas ou não com outras que têm valores certos e determinados, ao passo que as primeiras podem ter valores quaisquer. Essas quantidades que têm valores certos e determinados denominam – se constantes e, as outras, variáveis. (GOULIN, 1904, p. 3)

Oliveira (2004, p. 32) observa não há explicações sobre o significado do termo expressão analítica. Após essa definição, San Thiago apresentava uma série de exemplos de funções e afirmava que "o Cálculo Diferencial se resume em dar regras para diferenciar essas funções" (OLIVEIRA, 2004, p.33).

A noção de limite era introduzida por San Thiago da seguinte maneira:

> Limite de uma quantidade é a quantidade fixa da qual uma quantidade (variável) se approxima, sem jamais atingi-la. (GOULIN, 1904, p. 6)

É interessante notar que San Thiago não falava em limite de uma função propriamente dita e sim em limite de uma quantidade variável. Apresentava em seu curso um exemplo geométrico da noção de limite: tomava um polígono inscrito na circunferência cujo número de lados era sempre duplicado. Assim, o perímetro do polígono tendia para o perímetro da circunferência, ou seja, o perímetro da circunferência era o limite do perímetro do polígono.

Tendo definido funções e limites, San Thiago passava a dissertar sobre os métodos da análise infinitesimal. Começava expondo o Método da Exaustão, utilizado por Arquimedes para calcular áreas e, de acordo com Goulin (1904, p.7), comentava que o Método da Exaustão era um processo de análise infinitesimal, mas empregado sem utilizar uma notação adequada. Na seqüência, apresentava o método de Leibniz, afirmando que:

> Leibnitz, para resolver as questões, introduziu os taes infinitamente pequenos ou differenciais das quantidades. Elle suppunha as quantidades compostas de elementos infinitesimaes, estabelecia relações entre estas e, partindo dessas relações, chegava a determinar as relações entre as quantidades das questões". (GOULIN, 1904, p. 7)

A intenção de San Thiago ao apresentar os métodos de Leibniz, Newton e Lagrange era chegar à definição de derivada através de cada um deles. Para isso, utiliza a idéia de obter a equação de uma reta tangente a uma curva em um ponto dado. Assim, para o método de Leibniz, tomava um ponto $M(x, y)$ e obtinha a reta tangente à curva $y = f(x)$ neste ponto. Para isso, considerava um ponto $M´(x+dx, y+dy)$ infinitamente próximo a M e escrevia:

$$Y - y = \frac{y + dy - y}{x + dx - x}(X - x) \text{ com } dy \text{ infitesimal}$$

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

E esta última expressão representava a equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $M(x, y)$.

San Thiago abordava também o método de Newton apresentado sob duas formas: Método dos Limites ou das Primeiras e Últimas Razões e Método das Fluxões. Segundo Oliveira (2004, p.36), San Thiago buscava explicar o que eram as primeiras e últimas razões e porque desta denominação. Isto era feito da seguinte forma:

> Para compreender em que consiste o primeiro vamos mostrar como entender a sua denominação. Supponhamos ter as quantidades A, B, C, D,... que supporemos fixas e determinadas e que x, y, z, t, ... sejam outras quantidades que tendam ou se approximem de modos differentes das fixas
> e ao mesmo tempo.
> As quantidades A, B, C, D,... suppostas fixas e das quaes x, y, z, t, ... se approximam simultaneamente chamam-se, como sabemos, limites dessa quantidades ou seus <u>últimos valores</u>."
> As relações entre x e y, y e z,... tendem, portanto, para as relações entre A e B, B e C, ...
> As relações entre as fixas chamam-se por isso <u>ultimas razões</u> das relações entre as variáveis. Supponhamos, agora, o inverso, isto é, que, em vez de x, y, z,...se approximarem de A, B, C,... se affastem. Podemos, então, dizer que A, B, C,... são, por assim dizer, os <u>primeiros valores</u> das quantidades x, y, z, ... As relações entre esses primeiros valores serão as <u>primeiras razões</u> das quantidades x, y, z, ...
> Dahi a denominação de método das primeiras e ultimas razões. (GOULIN, 1904, p. 12)

Em seguida, mencionava a razão entre os "acréscimos" de Newton indicando-a por $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e seu limite por $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ para, através disto, obter pelo método de Newton a equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $M(x, y)$. De acordo com Oliveira (2004, p.36-37), isto é feito da seguinte forma: a reta tangente é considerada como sendo o limite de todas as retas secantes da forma $MM´$, onde $M´(x + \Delta x, y + \Delta y)$. E então, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\beta$ é o coeficiente angular da reta secante, onde β é a inclinação da secante $MM´$. Desta maneira, o $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha$, em que α é a inclinação da tangente em M, é o coeficiente angular da reta tangente. Segundo o mesmo autor, San Thiago:

> Conta, também, que a velocidade de um ponto em movimento sobre uma linha foi denominada fluxão, e o arco de curva, fluente. Newton dividiu o Cálculo em duas partes: na primeira introduziu os limites e as fluxões, com o mesmo fim do Cálculo Diferencial e, na segunda, o Cálculo dos fluentes tem a finalidade do Cálculo Integral. (OLIVEIRA, 2004, p. 37).

De acordo com Adriano Goulin, San Thiago introduzia o próximo método com o qual trabalhava, o método de Lagrange, contando que esse último instituiu o método das derivadas em substituição aos limites de Newton e aos infinitésimos de Leibniz, considerados por ele como processos que introduziram elementos estranhos à análise: os infinitésimos e os limites (OLIVEIRA, 2004, p.37). Lagrange partiu da Fórmula de Taylor

$$f(x+h) = f(x) + p \cdot h + q \cdot \frac{h^2}{2} + r \cdot \frac{h^3}{3} + ...$$

onde h é um "acréscimo" dado em x, e estudou os coeficientes deste desenvolvimento, verificando que os mesmos se formavam como as derivadas de f em x. Construiu, então, um processo analítico para o Cálculo denotando $p = f'(x)$, $q = f''(x)$, $r = f'''(x)$... Lagrange denominou o método de Cálculo das Funções Derivadas e o processo de eliminar essas quantidades era chamado de Cálculo das Funções Primitivas. Oliveira (2004) afirma que:

> Apesar de breve, a inclusão do método de Lagrange como fundamentação do Curso de Cálculo da Politécnica é, na nossa opinião, uma decisão importante do autor. O método de Lagrange não consta do livro do Sonnet, adotado para o seu curso, embora fizesse parte do programa anterior de Urbano de Vasconcellos. Sua manutenção foi um ato de vontade de San Thiago, que reconheceu a importância do método para o desenvolvimento do Cálculo como disciplina.
>
> O trabalho de Lagrange apresentou uma concepção diferente de derivada, contribuindo para a transformação do Cálculo em uma teoria de funções e de suas derivadas. (OLIVEIRA, 2004, p.37)

Após a apresentação dos métodos de Leibniz, Newton e Lagrange, San Thiago afirma que os três métodos convergiam para o mesmo resultado: a idéia de derivada. Essa afirmação era demonstrada com o auxílio da Fórmula de Tayor. Segundo apresenta Oliveira (2004), San Thiago:

Inicia a sua justificação com o desenvolvimento de f(x + dx) – f(x) em série de potências, na indeterminada dx .

$$f(x+dx)-f(x)=p\cdot dx+q\cdot\frac{dx^2}{2}+r\cdot\frac{dx^3}{3}+...=dy \text{ e } \frac{dy}{dx}=p$$

No cálculo anterior, leva em conta que p é uma quantidade finita e as outras, à sua direita, são infinitamente pequenas, por serem infinitésimos de ordem superior. Não são consideradas, por esse motivo.
Assim

$$\frac{dy}{dx}=f'(x) \text{ e } dy=f'(x)\cdot dx$$

A última relação é explicada com a frase: "a differencial de uma funcção é igual ao producto da derivada pela differencial da variavel independente". (GOULIN, 1904, p. 16)
A seguir, Goulin retorna ao desenvolvimento em série, na indeterminada Δx e usa o método dos limites de Newton, obtendo o mesmo resultado.

$$f(x+\Delta x)-f(x)=p\cdot\Delta x+q\cdot\frac{\Delta x^2}{2}+r\cdot\frac{\Delta x^3}{3}+...=\Delta y \text{ e } \lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=p$$

Menciona, então, que a identidade dos três métodos é verificada com a igualdade

$$\frac{dy}{dx}=\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x).$$

(OLIVEIRA, 2004, p.39).

E somente após todas essas considerações é que San Thiago apresentava a definição de derivada:

Derivada de uma função é o limite da relação do acréscimo da função para o da variável, quando este último tende a zero. (GOULIN, 1904, p. 16)

O conceito de integral era introduzido por San Thiago por meio de sua interpretação como área da região sob o gráfico de uma função $y=f(x)$, entre os valores a e b da variável x. O intervalo [a,b] era dividido em n partes iguais e eram considerados os retângulos inscritos e circunscritos à curva dada, com base nos subintervalos da divisão. Então, o limite da soma das áreas desses retângulos determinavam a integral. San Thiago considerava a amplitude do intervalo como sendo nh, onde h era a amplitude de cada um dos subintervalos da divisão. Indicava as ordenadas dos diversos pontos da divisão por $y_0, y_1, y_2,...y_n$. Assim, a área U limitada pelo gráfico de y = f(x), pelo eixo x e pelas ordenadas $y_0 = a$ e $y_n = b$, é maior que a soma das áreas dos retângulos de bases h inscritos em y = f(x) e é menor que as áreas dos retângulos correspondentes de mesma base circunscritos no gráfico de f. Então,

> Em virtude do que acaba de ser feito, se infere que existem dois limites entre os quaes está comprehendida a area procurada.
> Ora, a differença entre esses dois limites, entre os quaes se acha comprehendida a area que se quer determinar é $(y_n - y_0).h$.
> Ora, y_n e y_0 são as ordenadas extremas e não mudam . Nessa differença, pois, a única quantidade variavel é h. Porem h pode ser tomado tão pequeno quanto se queira, e mesmo nullo.
> Logo, os dois limites, para valores de h cada vez menores, tendem para a area e, no limite, a area poderá ser substituida por um qualquer dos dois limites. Todas as parcellas são o produto de uma ordenada por h. Sendo y uma ordenada qualquer, yh será um dos rectangulos (interno ou externo) e, como U, no limite, é a somma, escreveremos , de um modo geral e mnemonicamente, U = limΣyh.
> [...] Quando se escreve sómente Σ, quer se dizer que se trata de uma somma de quantidades que não variam de modo continuo. Portanto, Σ indica a somma de parcellas que variam de um modo descontinuo.
> Ora, quando é que esse rectangulo de variação pode ser considerado constante? É quando h é infinitamente pequeno ou dx.
> Teremos, então, limΣ = ∫
> Não se deve, pois, confundir o signal Σ com o signal de integral ∫ que é um signal que indica a somma de quantidades que variam de um modo continuo. Se h = dx temos, por conseguinte,
> U = ∫ ydx .
> Porém y = f(x). Logo U = ∫ f(x)dx.
> Uma integral, portanto, não é mais do que a somma de elementos que variam de um modo contínuo. (GOULIN, 1904, p.3)

De acordo com Oliveira (2004, p.49), San Thiago cita que a integração é a operação inversa da diferenciação e não apresenta o Teorema Fundamental do Cálculo. A fórmula

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

é justificada como uma diferença de áreas. Define as integrais indefinidas como sendo aquelas em que não se determinam valores da variável independente, e as definidas, como sendo aquelas nas quais os valores de a e b das abscissas são determinados.

Assim como fizemos no caso dos cursos das escolas militares do Rio de Janeiro, procuramos descrever aqui, de maneira sucinta, de que forma eram trabalhados os conceitos fundamentais do Cálculo no curso ministrado na Escola Politécnica de São Paulo no período compreendido entre 1893 e 1934.

O Objetivo dos Cursos de Cálculo no Brasil no Século XIX e Início do Século XX

Segundo Lima (2006, p.65), "o ensino da matemática que era ministrado nas escolas de engenharias brasileiras até as primeiras décadas do século XX privilegiava, em geral, as construções matemáticas anteriores ao séc. XIX". O mesmo acontecia nas escolas militares. Tanto nos cursos de Cálculo das Escolas Militares do Rio de Janeiro, quanto no curso da Escola Politécnica de São Paulo o conteúdo resumia-se basicamente a derivação e integração, sempre com ênfase nas regras destes processos, visando-se uma aplicabilidade do conteúdo. Esses cursos não visavam à construção rigorosa dos fundamentos dos conceitos matemáticos estudados; a matemática ensinada priorizava a formação de militares e de engenheiros. Oliveira (2004), afirma que:

> A Matemática, em particular o Cálculo Infinitesimal, exerceu o seu papel de disciplina de serviço na educação dos estudantes de engenharia. Tinha a finalidade de atender às necessidades dos estudantes em seu Curso, capacitando-os para o exercício de suas futuras funções. (OLIVEIRA, 2004, p.22)

Os próprios livros-texto de Cálculo eram adotados levando em consideração este objetivo. No caso da Escola Politécnica de São Paulo, até 1934 escolheu-se trabalhar com a obra *Premiers Élements du Calcul Infinitesimal* de Hyppolite Sonnet, que segundo Oliveira (2004, p.60) era direcionado prioritariamente a viabilizar a prática do futuro engenheiro, mostrando um cálculo diferencial e integral elementar e prático. Então, como afirma Lima (2006):

> De acordo com as pretensões de Sonnet, não era relevante, para ele, inserir no ensino do cálculo as demonstrações das regras ou teorias trabalhadas, mas apenas a sua aplicação.
> Nessa mesma perspectiva eram ministradas as aulas de San Thiago. (LIMA, 2006, p.73)

No caso das Escolas Militares do Rio de Janeiro, ao contrário do que ocorreu na Europa, não foi adotado um livro-texto de Cálculo escrito especialmente para esse tipo de escola. No entanto, também se percebe claramente nesses cursos uma maior preocupação com relação às técnicas, à aplicação dos conceitos em cálculos do que com relação a uma conceitualização rigorosa dos principais elementos do Cálculo Diferencial e Integral. Essa foi, sem dúvida, uma das principais características do ensino do Cálculo no Brasil durante todo o século XIX e início do século XX.

Comparando as Abordagens dos Conceitos Fundamentais Presentes nos Cursos Analisados

Nesta seção iremos estabelecer uma comparação entre as abordagens dos conceitos fundamentais do Cálculo presentes nos cursos analisados. Estamos entendendo como conceitos fundamentais do Cálculo: função, limite, derivada e integral.

a) Função

Conforme já dissemos anteriormente, a obra de Lacroix e, consequentemente, os cursos de Cálculo das Escolas Militares do Rio de Janeiro não apresentavam uma definição satisfatória de função. Isso é perfeitamente compreensível já que, somente em meados do século XIX é que Leujene Dirichilet (1805-1859) estabeleceu uma definição mais ampla para o termo. De acordo com Eves (2004),

> A palavra função, na sua forma latina equivalente, parece ter sido introduzida por Leibniz em 1694, inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva. [...] Por volta de 1718, Johann Bernoulli havia chegado a considerar uma função como uma expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes; pouco tempo depois Euler considerou uma função como uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes. [...] O conceito de Euler se manteve inalterado até que Joseph Fourier (1768-1830) foi levado a considerar, em suas pesquisas sobre a propagação do calor, as chamadas séries trigonométricas. Essas séries envolvem uma forma de relação mais geral entre as variáveis que as que já haviam sido estudadas anteriormente. Numa tentativa de dar uma definição de função ampla o suficiente a ponto de englobar essa forma de relação, Lejeune Dirichilet (1805-1859) chegou a formulação que conhecemos hoje (EVES, 2004, p. 661).

No curso da Escola Politécnica encontramos uma definição um pouco mais clara e detalhada de função: a função vista como uma expressão analítica. No entanto, como salienta Oliveira (2004), essa idéia de função como expressão analítica, apenas, ainda é somente uma fase da evolução do conceito deste ente matemático e, assim como acontecia nos cursos orientados por Lacroix, ainda não é apresentada uma definição abrangente o bastante. Convém destacar também que San Thiago buscava, através de exemplos, esclarecer o que estava entendendo por funções, enquanto que, em Lacroix, nenhum exemplo era apresentado e, já na página seguinte a tentativa de definição desse termo, outro conceito dependente da idéia de função (o conceito de derivada) era apresentado.

b) Limite

Na obra de Lacroix, não encontramos uma definição do conceito de limite. A palavra limite apenas é citada durante a abordagem do conceito de derivada.

No curso de San Thiago na Politécnica de São Paulo, nota-se uma evolução na forma como este conceito é abordado. Apesar de não apresentar a definição de maneira formal, trazendo apenas uma definição retórica, esse conceito ao menos era trabalhado e não apenas citado. Além disso, novamente havia a preocupação em exemplificar o conceito introduzido. Neste caso, era apresentado um exemplo geométrico da noção de limite que já explicitamos anteriormente.

c) Derivada

Percebe-se no curso de San Thiago um tratamento mais completo para a idéia de derivada do que aquela apresentada nos cursos das escolas militares do Rio de Janeiro. Enquanto a abordagem dessas escolas fornecia, basicamente, uma "receita" para calcular a derivada de uma função dada, através das idéias de diferença e de diferencial, na abordagem presente no curso de San Thiago já se observa uma preocupação maior com relação aos conceitos teóricos envolvidos na idéia de derivada. Esta preocupação se torna evidente no momento em que opta por trabalhar o conceito de derivada por três métodos diferentes. Afinal, como afirma Oliveira (2004, p. 39), "aparecem três direções para o seu desenvolvimento, o que enriquece as possibilidades de tratamento dos assuntos e facilita as deduções e as manipulações das fórmulas".

d) Integral

A abordagem desse tema no livro de Lacroix enfatiza as técnicas de integração. Em nenhum momento, o conceito de integral é formalizado. Durante toda a apresentação desse conteúdo os alunos das escolas militares trabalhavam somente com a idéia de que a integração é a operação inversa da diferenciação e, em grande parte, o trabalho era baseado nas integrais indefinidas. Como já dissemos, o Teorema Fundamental do Cálculo não era citado, mas trabalhado de uma forma implícita.

Já o curso de San Thiago, apesar de também frisar a idéia de integração como operação inversa da diferenciação, abordava esse tema de maneira totalmente diferente da de Lacroix. O conceito de integral já era introduzido através da noção geométrica de área da região sob o gráfico de uma função $y = f(x)$, entre os valores a e b da variável x. O Teorema Fundamental do Cálculo não era trabalhado e a fórmula que permite o cálculo das integrais definidas era justificada mediante a idéia de diferença de áreas.

Em termos de conteúdo, a abordagem a respeito de integrais apresentada por Lacroix era mais completa que a de San Thiago. Enquanto o curso de Cálculo Integral de San Thiago apresentava 46 páginas, a segunda parte do livro de Lacroix, dedicada ao Cálculo Integral contemplava mais de 600 páginas. Oliveira (2004) afirma que:

> O Cálculo Integral das notas de aula de Goulin contém um mínimo de teoria, e o leitor exigente deve procurar conhecimento fora do texto. Sua prática na integração das funções e nas aplicações da integral é também limitada pela falta de exemplos e de exercícios. (OLIVEIRA, 2004, p.49).

Oliveira (2004) comenta também que a abordagem dos métodos de integração ocupava 17 páginas do curso de San Thiago e que a possibilidade de integração de funções por séries era apenas citada. No livro de Lacroix, são mais de 100 páginas de técnicas de integração e uma abordagem detalhada de integração por séries. Talvez essa grande diferença em relação à quantidade de conteúdo apresentada nessas duas obras possa ser explicada pelo fato de o livro de Lacroix ter sido escrito na época da Enciclopédia onde, como refere Serres (1989, p. 173) o espírito "[d]a totalidade do saber (...)" imperava". e pelo fato de não ser destinado a um curso superior específico como era o caso do curso de San Thiago, direcionado para engenheiros. Talvez, não fizesse sentido aprofundar tanto o estudo da integração em um curso de engenharia e San Thiago tenha optado por ensinar aquilo que julgava fundamental para que aqueles estudantes pudessem exercer suas futuras profissões.

Considerações Finais

As considerações aqui chamadas de finais são, na verdade, apenas o início de nosso trabalho, que busca entender de que forma o Cálculo Diferencial e Integral tem sido ensinado nos cursos de Licenciatura em Matemática dos Estados de São Paulo e Rio de Janeiro, desde 1934, quando foi criada a Universidade de São Paulo e dentro dela o primeiro curso superior de Matemática no Brasil, até os dias de hoje, e, também, analisar qual tem sido o papel desses cursos na formação de futuros professores de Matemática. Mas como entender a maneira como o Cálculo passa a ser ensinado a partir de 1934 se não conhecermos a forma como essa disciplina era ensinada antes desse ano? Foi exatamente em busca de responder essa questão que realizamos a pesquisa aqui resumida. Encerramos este artigo apresentando algumas observações didáticas a respeito dos cursos estudados.

No que diz respeito à forma de apresentação do conteúdo, tanto os cursos das escolas militares que se orientavam pela obra de Lacroix quanto o curso de San Thiago apresentavam como característica comum o fato de misturarem a retórica da linguagem com o formalismo matemático; o simbolismo alternado com grandes textos em linguagem natural.

A obra de Lacroix não trazia figuras ao longo do desenvolvimento do conteúdo; eles encontravam-se em anexo no final do livro. Já nas notas de aula do curso de San Thiago de acordo com Oliveira (2004, p.32), "existem poucas figuras no texto, que surgem na determinação da reta tangente a uma curva e na definição de integral. O leitor pode visualizar nelas os argumentos propostos".

Tanto na obra de Lacroix quanto no curso de San Thiago havia uma carência de mais exemplos e de problemas motivadores para chegar à construção dos conceitos. Oliveira (2004, p.32) argumenta que, no entanto, San Thiago enriquecia a introdução dos conceitos através de dados históricos.

Outra característica a ser destacada é que, tanto o curso de San Thiago, quanto os cursos das escolas militares do Rio de Janeiro eram centrados no professor, visto como único detentor do conhecimento. Na apresentação do conteúdo, tudo era explicitado, todos os processos revelados, não havendo espaços para que o aluno construísse seu conhecimento.

Salientamos também que, durante esses cursos de Cálculo do final do século XIX e início do século XX, não havia a preocupação com demonstrações de resultados como que a observamos na maioria dos cursos atuais. Só eram apresentadas as definições e deduções essenciais ao desenvolvimento do curso.

Todas essas informações deverão ser levadas em conta em nossas pesquisas futuras. Quais das características aqui observadas se mantêm e quais se alteram nos cursos de Cálculo ministrados depois de 1934? O que muda com relação aos conteúdos ensinados? E com relação aos objetivos dos cursos dessa disciplina? Como esses cursos aqui analisados influenciaram na formação dos professores de Cálculo no início do século XX? Todas essas são questões que buscaremos responder no decorrer de nosso trabalho. E para atingirmos nossos objetivos, as informações obtidas na pesquisa aqui apresentada serão de fundamental importância.

Referências Bibliográficas

BOYER, Carl Benjamin. **The History of the Calculus and its Conceptual Development**. Nova Iorque: Dover Publications, 1949.

DHOMBRES, Jean. French Mathematical Textbooks from Bézout to Cauchy. In **Historia Scientiarum**, nº 26, 1985.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. 843p.

GOULIN, Adriano. **Curso de Cálculo de Rodolpho Baptista San Thiago**. São Paulo: Escola Politécnica, 1904.

LACROIX, Sylvestre François. **Traité élémentaire de calcul différentiel e de calcul integral**. Paris: Gauthier-Villars, 1867. Primeiro volume disponível em <http://historical.library.cornell.edu/cgi-bin/cul.math/docviewer?did=01490002&seq=7> . Segundo volume disponível em <http://historical.library.cornell.edu/cgi-bin/cul.math/docviewer?did=Lacr016&seq=7 >. Acesso em: 13 jun. 2008

LIMA, Eliene Barbosa. **Dos Infinitésimos aos Limtes**: a contribuição de Omar Catunda para a modernização da Análise Matemática no Brasil. 2006. 145f. Dissertação (Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) - Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2006.

MOREIRA, Darlinda. Profissionalização e continuidade geracional: uma leitura sociológica do prefácio do *Traité du Calcul Differentiel et du Calcul Intégral* de S. F. Lacroix. In MOREIRA, D. & MATOS, J. M. (Orgs.). **História do Ensino da Matemática em Portugal**. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2005

OLIVEIRA, A. S. V. de. **O ensino do cálculo diferencial e integral na Escola Politécnica de São Paulo, ano de 1904**: uma análise documental. 2004. 135f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), IGCE, UNESP, Rio Claro, 2004.

SERRES, Pierre Marcel Toussaint de. Paris 1800. In: **Elementos para uma História das Ciências**. V. II: Do Fim da Idade Média a Lavoisier, p.167-195. Terramar Editores, 1989.

SILVA, Circe Mary. Silva da. O conceito de derivada no ensino da matemática no Brasil do século XIX. In: ICME-8 Satellite Meeting HPM, 1996, Braga. **Anais**. Braga : Grafis, Coop. de Artes Gráficas, 1996. v. 1. p. 80-87.

______. A Matemática Positivista e sua Difusão no Brasil. Vitória: EDUFES, 1999.