O Logicismo, o Formalismo e o Intuicionismo e seus Diferentes Modos de Pensar a Matemática

Fabiane Mondini[1]

Este artigo é parte de uma pesquisa de mestrado em desenvolvimento, cujo objetivo é compreender como os professores que trabalham em cursos de formação de professores de Matemática compreendem a Álgebra, como a estudam e a trabalham com seus alunos, os quais futuramente serão professores de Matemática. Essa busca envolve compreender também o modo pelo qual se mantêm em formação, como professores pesquisadores de Álgebra e como se preocupam com a formação em Álgebra dos seus alunos.

Este trabalho é norteado pela seguinte questão: *como os professores de Álgebra, dos cursos de Licenciatura em Matemática, compreendem e trabalham a Álgebra, em termos de conteúdo e prática pedagógica?* Resumidamente posso dizer que a interrogação interroga a própria concepção da Álgebra nos cursos de formação de professores de Matemática da Educação Básica.

O desenvolvimento dessa pesquisa iniciou como o estudo de investigações já realizadas que abordaram temas como: o processo de ensino e aprendizagem de Álgebra, principalmente nos cursos de Licenciatura em Matemática, a formação didático-pedagógica e o conhecimento teórico de professores de Matemática, assim como trabalhos sobre a prática de professores de Matemática que apresentam a Álgebra como tema central na discussão.

---

[1] Aluna do curso de mestrado em Educação Matemática da UNESP – Campus de Rio Claro/SP. Trabalho desenvolvido sob orientação da Profa. Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo. Bolsista Cnpq. fabiane.mondini@gmail.com

Na tentativa de responder essa questão, consideramos necessário olhar para a História da Matemática, para a História da Educação Matemática, para o que os professores de Álgebra dizem sobre seu trabalho e os modos distintos de compreender o que é a Matemática. Este texto é uma parte desse estudo e apresenta uma discussão sobre três modos de pensar a Matemática: o *Logicismo,* o *Intuicionismo* e o *Formalismo*, na tentativa de compreender como a Matemática se constituiu como Ciência no decorrer da História de nossa cultura.

A constituição da Matemática como Ciência Formal

O que justifica a estruturação da Matemática como Ciência? A necessidade de respostas para essa pergunta deu início à sistematização do conhecimento que hoje chamamos de Matemática. A busca de fundamentos para estruturar a Matemática com o rigor de uma Ciência iniciou-se com os gregos, mais especificamente com Platão, que tinha os objetos matemáticos como ideais e concebia que estes eram acessíveis à mente humana apenas pelo conhecimento. Para ele, os objetos matemáticos eram repletos de perfeição e verdade. O homem deveria esforçar-se para conhecê-los e, conhecendo-os, evoluir.

Na filosofia platônica, a Matemática era concebida como uma verdade independente de qualquer verificação empírica, e os objetos matemáticos serviam de modelo para as formas mundanas, ou seja, apenas uma reprodução grosseira desses objetos aparecia no mundo humano. O mundo em que vivemos seria como uma imagem imperfeita refletida num espelho imperfeito do mundo das idéias. No auge do império platonista na Matemática, prevalecia a visão de que é que "a tarefa dos matemáticos era comparável a uma viagem de descobrimentos" (BARKER, 1976, p. 105). O matemático não criava dos objetos a respeito dos quais falava, mas os descobria. Segundo Silva (2007, p. 43), "hoje, poucos ainda aceitam seriamente o reino puro de idéias de Platão.

Mas a imagem da Matemática como uma Ciência de um domínio fora desse mundo ao qual ascendemos pelo pensamento é ainda a 'filosofia' natural dos matemáticos".

Posteriormente a Platão, temos as idéias de seu discípulo Aristóteles, que recusou a filosofia platonista em partes. Aristóteles, assim como Platão, considerava a existência da Matemática independente do ser humano, mas discordava da crença platonista de que os objetos da Matemática existiam em um mundo não humano. Para ele, os objetos da Matemática estão "nesse mundo" e acessíveis a nós pelo conhecimento e pelos sentidos, sendo que estes últimos não são plenamente confiáveis. Resumidamente e de acordo com Silva (2007, p.38), Aristóteles é o filósofo "pés no chão" e Platão tem "a cabeça nas nuvens".

As idéias aristotélicas livram o homem de ser apenas um descobridor e o colocam como construtor do mundo matemático. Aristóteles considerou a Matemática uma Ciência dedutiva e foi o primeiro sistematizador da Lógica Formal. Outras contribuições dele para a Matemática foram a distinção entre o infinito atual e o potencial, o modo de comparar a Matemática com um edifício logicamente estruturado e "a análise de noções metamatemáticas fundamentais, como as de axioma, definição, hipótese e demonstração" (SILVA, 2007, p.50-51).

O modo aristotélico de atribuir ao homem o poder de criar e pensar sobre a Matemática e não apenas descobri-la contribuiu para o nascimento, na Idade Média, de uma nova filosofia, que não é exclusiva da Ciência Matemática: o realismo aristotélico.

Diferentemente da Filosofia, na Matemática, quando falamos em "realismo, estamos falando do platonismo"[2]. Portanto, neste texto, quando falamos em realismo, nos referimos ao realismo fundamentado no platonismo.

O realismo, fundamentado no platonismo, foi base filosófica para o movimento logicista. Movimento este que tinha por objetivo mostrar a

---

[2] Explicação dada pelo professor Irineu Bicudo em 11/04/2008, gravada e transcrita com sua autorização.

Matemática como uma Ciência consistente e completa e expô-la como uma linguagem simbólica para simplificar suas formas de apresentação. O caminho escolhido para fazer isso foi a aritmetização da Análise. Na tentativa de aritmetizar a Análise, destacaram-se vários matemáticos. Entre eles estavam Weierstrass, Dedekind e Frege.

O objetivo do movimento logicista era "excluir da Análise as intuições geométricas, substituindo-as por noções da Aritmética, ou seja, estabelecer a Análise como base para o sistema de números reais". [3] Assim, o sistema de números reais pode ser construído a partir do sistema de números racionais, estes podem ser construídos a partir dos números inteiros, que por sua vez podem ser construídos a partir dos números naturais. Dessa maneira, a Análise estaria fundamentada no sistema de números naturais.

Frege, Russell e muitos outros lógicos modernos se lançaram na jornada de vincular a Matemática à Lógica, na tentativa de torná-la uma Ciência sem contradições. Frege criou um sistema lógico próprio e, posteriormente, tentou explicar toda a Aritmética usando seu sistema. O objetivo de seus estudos era mostrar que "a Aritmética é pura lógica" (Silva, 2007, p.128). E como é a Lógica que atesta ou contesta o sistema de verdades matemáticas, quando conseguisse escrever a Aritmética conforme seu sistema lógico, ele teria uma Aritmética livre de contradições, ou seja, verdadeira.

Bertrand Russell deu continuidade ao projeto de Frege com algumas alterações no que diz respeito ao sistema lógico. Porém, nem Russell e nem Frege foram bem sucedidos na tentativa de reduzir a Matemática à Lógica.

O Logicismo fracassou porque nem todos os axiomas puderam ser escritos na forma de proposições lógicas. Segundo Machado (1991, p.27), para alcançar seu objetivo, "os logicistas deveriam mostrar concretamente que todas as proposições matemáticas podem ser expressas na terminologia lógica

---

[3] Explicação dada pelo professor Irineu Bicudo em 11/04/2008, gravada e transcrita com sua autorização.

e, que todas as proposições matemáticas verdadeiras são as expressões verdadeiras para a Lógica".

O que conseguiram, segundo Silva (2007, p. 134), foi uma divisão entre os matemáticos. Uns seguiram o projeto de Frege. Outros entendiam que a Ciência Matemática havia se tornado excessivamente formal e que era necessário colocá-la novamente em bases seguras, partindo de verdades manifestadas nas intuições imediatas.

Apesar de o movimento logicista não conseguir executar seu objetivo inicial, reescrever toda a Matemática em um sistema lógico e livre de contradições, eliminando as idéias intuitivas presentes nela, ele foi muito importante para essa Ciência. O logicismo foi o ponto de partida para o desenvolvimento da Lógica Matemática Moderna e para a formação de um segundo grupo de matemáticos que, contrariamente aos logicistas, procuraram sistematizar a Matemática, partindo sempre da intuição. Esse grupo constituiu o movimento intuicionista[4].

Segundo Snapper (1984, p.88.), no intuicionismo havia a concepção de que entidades abstratas, como a Matemática, eram elaborações humanas e não objetos ideais platônicos. Diferentemente dos logicistas, os intuicionistas consideravam a Matemática Clássica falível em alguns pontos. Os paradoxos relativos à teoria dos conjuntos, por exemplo, no intuicionismo eram erros da Matemática e não dos matemáticos como pensavam os logicistas.

Os intuicionistas consideravam o ser humano dotado de uma intuição primeira sobre os números naturais. Por isso defendiam uma reelaboração da Matemática desde seus fundamentos. Partindo sempre da intuição, os axiomas, os teoremas, enfim, toda a Matemática deveria ser reconstruída. O que fundamentava o movimento intuicionista era a consideração de que as entidades abstratas existiam somente quando eram construídas pela mente humana. Desse modo, o que não partisse da intuição não era Matemática.

---

[4] O intuicionismo foi uma das principais correntes do movimento construcionista. Os construcionistas acreditavam que todo e qualquer conhecimento deveria ser construído a partir da intuição.

O movimento intuicionista não foi bem sucedido quanto aos seus objetivos. Muitos matemáticos clássicos se posicionaram contra a concepção intuicionista. Inúmeros teoremas, vistos como inúteis e sem sentido pelos intuicionistas, eram considerados belos na Matemática Clássica, gerando assim um conflito. Os intuicionistas defendiam a existência de objetos matemáticos somente quando esses pudessem ser dados por construção, ou seja, “um objeto existe se e, somente se, for possível construí-lo”.[5] Além disso, algumas teorias falsas para os intuicionistas eram consideradas verdadeiras pelos matemáticos clássicos. Um exemplo são os números complexos. Todos esses conflitos acabaram com desprezo e rejeição dos matemáticos clássicos em relação à corrente intuicionista.

Com a criação da Teoria dos Conjuntos e, conseqüentemente, com a verificação dos paradoxos que ela apresentava, sentiu-se a necessidade, no início do século XX, de livrar a Matemática de paradoxos. A maneira encontrada para isso foi a axiomatização da Matemática, por meio de axiomas claros, de tal modo a não gerar paradoxos.

O objetivo principal do formalismo é provar que as idéias matemáticas são isentas de contradições. Caso os formalistas alcançassem seu objetivo, a Matemática se tornaria livre de paradoxos e contradições e, quando ela pudesse ser reescrita com demonstrações rigorosas em um sistema formal, se estabeleceria como verdade. Segundo Silva (2007, p.195), para Hilbert a verdade era o que garantia e assegurava os métodos e as teorias tradicionais da Matemática.

A filosofia base para o formalismo é o nominalismo, segundo o qual as entidades da Matemática não existem, nem como objetos reais e nem como objetos mentais. No formalismo “as deduções são cadeias de transformações de expressões simbólicas segundo regras explícitas de manipulação de símbolos” (SILVA, 2007, p. 184). As deduções e as transformações da

---

[5] Explicação dada pelo professor Irineu Bicudo em 11/04/2008, gravada e transcrita com sua autorização.

Matemática, ao mesmo tempo em que eram passíveis de interpretação por quem as manipulava, tinham um significado explicitado em um sistema formal que estava se constituindo.

Silva (2007, p.284) cita o seguinte exemplo: imaginemos a adição de dois “números grandes” em notação decimal. Transformá-los em unidades, para depois adicioná-las, levaria muito tempo e em qualquer parte do processo poderíamos cometer erros. Se usarmos o algoritmo da adição, com suas regras já estabelecidas em um sistema formal, operamos o algoritmo mecanicamente. No entanto, sabemos o que estamos fazendo e há significado na manipulação simbólica que realizamos na resolução do algoritmo. O formalismo traz para a Matemática um conjunto de regras e símbolos que nos permitem operar mecanicamente. Graças a esse conjunto de regras, hoje podemos usar calculadoras e programas de computador para executar diversos cálculos.

Dos matemáticos que tentaram formalizar a Matemática podemos destacar Hilbert. Entre suas contribuições, está a axiomatização da Geometria Euclidiana. Os elementos de Euclides eram fundamentados na visualização cotidiana e, portanto, na intuição. Hilbert reescreveu toda a Geometria Euclidiana, com a complementação de suas propriedades, axiomas e teoremas.

O que Hilbert pretendia para a Matemática era estabelecer uma linguagem formal, com demonstrações verificáveis passo-a-passo e livrá-la de contradições. Em uma conferência proferida em 1900, no II Congresso Internacional de Matemática, realizado em Paris, propôs 23 problemas aos matemáticos da época. Um deles era a demonstração da compatibilidade dos axiomas da Aritmética.

Em 1930, Gödel provou a impossibilidade de demonstrar a compatibilidade dos axiomas da Aritmética dentro de um sistema que inclua a Aritmética. Com isso, provou também que o projeto de Hilbert não poderia ser bem sucedido, “porque não é possível provar a consistência da Matemática dentro da própria Matemática” [6] .

O intuicionismo, o logicismo e o formalismo são as correntes filosóficas que apresentam visões distintas sobre o que é a Matemática. Há entre elas incompatibilidade em alguns pontos. Mas haver incompatibilidade não significa que uma exclui a outra. Segundo Silva (2007, p.235-236), o intuicionismo, fundamentado no construtivismo, mostrou quais conhecimentos matemáticos podem e quais não podem ser construídos partindo de idéias intuitivas. O logicismo mostra as intersecções da Matemática com a Lógica. E o formalismo estabelece a Matemática como “a Ciência dos sistemas formais”.

A Matemática atual é fruto de todo esse processo de elaboração e re-elaboração de si mesma e é no decorrer desses modos de pensar, principalmente do formalismo, que a Álgebra Abstrata ou Moderna[7] emerge no contexto da Ciência Matemática. Justificamos dessa maneira, a importância de realizarmos esse estudo para o desenvolvimento de nossa pesquisa.

REFERÊNCIAS

BELL, E. T. **Historia de las matemáticas**. 2ª ed. Mexico: Fondo de Cultura Economica 1995. 656 p.

BERNARDO, M. V. C. **Re – vendo a Formação do professor Secundário nas Universidades do Estado de São Paulo.** Tese (Doutorado em Psicologia da Educação) PUC, São Paulo, 1986.

BICUDO, M. A. V. & ESPÓSITO, V. H.C. **Pesquisa Qualitativa em Educação.** São Paulo: Ed. Unimep, 1994, 233p.

BICUDO, M. A. V. A Contribuição da fenomenologia para á educação. In: BICUDO, M. A. V (Org). **Fenomenologia uma visão abrangente da Educação**. São Paulo: Olho D’água, 1999. p. 11-51.

[6] Explicação dada pelo professor Irineu Bicudo em 11/04/2008, gravada e transcrita com sua autorização.
[7] Um exemplo é o livro o van der Waerden, denominado Algebra Moderne, de 1930.

BICUDO, M. A. V. **Fenomenologia:** Confrontos e Avanços. São Paulo: Cortez, 2000. 167 167 p.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. 2a ed. São Paulo: Edgar Bhicher Ltda. 1996, 496p.

DANYLUK, O. **Alfabetização Matemática:** as primeiras manifestações da escrita infantil. 2ª ed. Porto Alegre: Ediupf, 1998. 239 p.

DAVIS, P.J. & HERSH, R. A **Experiência Matemática**. Rio de Janeiro. Ed. Francisco Alves, 1985. p. 359-386.

EVES, H. **Introdução a história da Matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues Campinas: Ed. UNICAMP, 1995. 843p..

FIORENTINI, D.; MIORIM, A. M.& MIGUEL, A. Contribuições para um repensar.a educação algébrica elementar. Pro-Posições, Campinas, v.4, n.1, p.78-91, mar.1993**.**

GARNICA, A. V. M P. I. **Fascínio da Técnica, Declínio da Crítica**: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 1995.

HEIDEGGER, M. **Ser e Tempo.** 15ª ed. Petrópolis: Ed. Vozes. 2005. 325 p.

KLUTH, V. S. Estruturas da Álgebra **– Investigação fenomenológica sobre a construção do seu conhecimento. Tese** (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2005.

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna:** análise de uma impregnação mútua. 2. ed. São Paulo: Cortez, 1990. 115 p.

MACHADO, N. J. **Matemática e Realidade.** 3 ed. São Paulo: Cortez, 1991. 103 p.

MARTINS, J. & BICUDO, M. A. V. **Pesquisa qualitativa em Psicologia**: Fundamentos e Recursos Básicos. Sociedade de Estudos e Pesquisas Qualitativos. São Paulo: Ed. Moraes, 1989.110p.

MIGUEL, A., FIORENTINI, D. & MIORIM, A. M. Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo? **Pró-posições**, Campinas, vol. 3, p. 15-35, n° 1, 1992.

MILIES, F. C. P., **História da Álgebra.** Disponível em: www.bienasbm.ufba.br:/M18.pdf+Milies+hist%C3%B3ria+da+%C3%81lgebra &hl=ptR&ct=clnk&cd=2&gl=br&lr=lang_pt. Acessado em 04 de mai. 2008.

MOREIRA, P. C. e DAVID, M. M. M. S., **A Formação matemática do professor.** Licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Ed. Autêntica, 2005. 114 p

OLIVEIRA, V. C. A**. Sobre a produção de significado para a noção de transformação linear em Álgebra Linear**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2002.

SILVA, J. J., **Filosofias da matemática.** São Paulo: Ed. da UNESP, 2007. 239 p.

SNAPPER, E**.** As três crises da Matemática: o logicismo, o intuicionismo e o formalismo. **Revista Humanidades**, volume II, n. 8, p. 85-93, jul-set. 1984.

UFRGS, Universidade federal do Rio grande do Sul. **van der Waerden. Dísponível em:** http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/vanderw.html). Acessado em 04 de abril de 2008.

ULBRICHT, V. R. **Caminhando no tempo com a Geometria**. Disponível em: <epartamentos.unican.es/digteg/ingegraf/cd/ponencias/48.pdf>. Acesso em 12 de jun . 2006.